MICHEL HERVÉ

Sur les fonctions fuchsiennes de deux variables complexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 277-302

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__277_0>

SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES DE DEUX VARIABLES COMPLEXES

PAR M. MICHEL HERVÉ.

Introduction.

Une fonction fuchsienne relative à un groupe discontinu γ d'automorphismes d'un domaine D est une fonction $\theta(z)$ holomorphe sur D et vérifiant, pour chaque automorphisme $z' = f(z)$ du groupe γ, l'identité $\theta[f(z)] \equiv \theta(z)[\mathrm{D}f(z)]^{-m}$, où $\mathrm{D}f(z)$ désigne le déterminant fonctionnel et m un entier appelé dimension de la fonction $\theta(z)$. Cette notion, sous ce nom et aussi sous quelques autres (fonction thêtafuchsienne, forme automorphe), joue, dans de nombreux travaux sur les fonctions automorphes, un rôle important quoique intermédiaire, les séries de Poincaré permettant de construire des fonctions fuchsiennes, et celles-ci à leur tour fournissant des fonctions automorphes.

Si l'on porte son attention sur les fonctions fuchsiennes les premières questions me semblent être :

1° Toute fonction automorphe est-elle quotient de deux fonctions fuchsiennes ?

2° Toute fonction fuchsienne est-elle somme d'une série de Poincaré ?

3° Quel est le nombre maximum, soit $d(m)$, de fonctions fuchsiennes de dimension m linéairement indépendantes ?

Le Mémoire de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes d'une variable [12] (¹) contient les réponses à ces questions pour un groupe γ de la première famille, c'est-à-dire dont le polygone fondamental a sa frontière tout entière dans D (et aussi pour d'autres groupes, mais avec des hypothèses supplémentaires

(¹) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie (à la fin).

sur le comportement d'une fonction fuchsienne à la frontière de D); les réponses sont : oui aux 1^{re} et 2^e questions et, à la 3^e,

$$d(m) = (2m-1)(P-1) + \sum_i \left[m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)\right],$$

où le crochet désigne la partie entière, P et β_i des entiers, en nombre fini, attachés à γ; $\frac{2\pi}{\beta_i}$ est la somme des angles du polygone fondamental aux divers sommets d'un cycle elliptique; ce résultat est de la forme

$$d(m) = am + b(r),$$

r étant le reste de la division de m par le PPCM des β_i, a ne dépendant que de γ. La méthode de Poincaré peut être qualifiée d'algébrique : ayant établi que toutes les fonctions automorphes relatives à γ sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles, convenablement choisies, il calcule le nombre des conditions imposées à une courbe algébrique d'ordre donné par le fait qu'elle a, en des points donnés, des contacts d'ordres donnés avec des courbes données.

Pour les fonctions automorphes de n variables relatives à un groupe γ, Blumenthal a montré [1] qu'elles sont fonctions rationnelles de $n+1$ d'entre elles, convenablement choisies; mais l'extension à n variables du raisonnement de Poincaré me semble poser un problème de géométrie algébrique si ardu que j'ai cherché une autre méthode dans la théorie des fonctions, en me bornant aux hypothèses suivantes : D borné et univalent, γ de la 1^{re} famille (hypothèse qui ne suppose pas connu un domaine fondamental, mais seulement un ensemble compact $K \subset D$ tel que D soit réunion des images de K par γ). On sait alors [13] que D est domaine d'holomorphie, ce qui permet d'appliquer les théorèmes de M. H. Cartan [4] sur les idéaux de fonctions analytiques.

Contrairement aux propriétés précédentes, certains procédés employés ici (par exemple dans la représentation paramétrique locale d'une variété analytique) ne valent que pour $n = 2$; ne pouvant donner, pour n quelconque, que des résultats partiels, j'ai préféré consacrer ce travail aux fonctions de deux variables complexes. Des trois questions posées ci-dessus, la première est résolue au n° 13, les deux autres, mais seulement pour m assez grand, au n° 18, et cela dans tout domaine D admettant un groupe γ d'automorphismes à la fois discontinu et de la 1^{re} famille : c'est dire, peut-être, que les démonstrations sont communes au bicercle et à l'hypersphère.

La plus grande partie de ce travail a été exposée dans les leçons que j'ai faites cette année au Collège de France, au titre de la Fondation Peccot. Je suis heureux de remercier MM. les Membres de l'Université et du Collège de France qui m'ont fait l'honneur de me charger de ces leçons, et en particulier M. Montel qui a inséré ce Mémoire dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*.

I. — Terminologie.

1. Soit D un domaine borné, univalent, de l'espace $\mathcal{C}^2$ rapporté à deux coordonnées complexes x, y; la notation $z=(x, y)$ désignera un point de D.

Toute suite, uniformément convergente sur tout compact, d'automorphismes [2] de D a pour limite, soit un automorphisme de D, soit une transformation dégénérée, à déterminant fonctionnel identiquement nul, qui transforme chaque point de D en un point de la frontière de D[2].

Un groupe γ d'automorphismes de D est *discontinu* si toute suite convergente d'automorphismes distincts pris dans γ a pour limite une transformation dégénérée. Il revient au même de dire :

a. qu'on ne peut extraire de γ une suite d'automorphismes distincts de la transformation identique et convergeant vers celle-ci;

b. qu'étant donné dans D deux compacts quelconques K_1 et K_2, les ensembles K_1 et $f(K_2)$ n'ont de points communs que pour un nombre fini d'automorphismes f appartenant à γ.

Ainsi un groupe discontinu comprend au plus une infinité dénombrable d'automorphismes. D'autre part, les automorphismes du groupe qui laissent fixe un point z_0 de D forment un sous-groupe fini $\gamma(z_0)$, donc chacun d'eux compte la transformation identique parmi ses itérés.

Soit $Df(z)$ le déterminant fonctionnel de l'automorphisme $z'=f(z)$: il existe un entier positif $q(z_0)$, que nous prendrons le plus petit possible, tel que $f\in\gamma(z_0)$ entraîne $[Df(z_0)]^{q(z_0)}=1$. Si z_0 et z_1 sont *équivalents par* γ, c'est-à-dire $z_1=g(z_0)$, avec $g\in\gamma$, l'ensemble des valeurs prises par $Df(z_0)$ pour $f\in\gamma(z_0)$ est aussi l'ensemble des valeurs prises par $Df(z_1)$ pour $f\in\gamma(z_1)$, donc $q(z_0)=q(z_1)$. D'autre part, $q(z)$ est borné sur tout compact K : en effet, γ ne comprend qu'un nombre fini d'automorphismes laissant fixes des points de K; si f_i est l'un d'entre eux, il existe un entier $r_i>0$ tel que $f_i^{r_i}$ soit la transformation identique, et $z\in K$ entraîne

$$q(z)\leqq \mathrm{PPCM}\, r_i.$$

2. Nous dirons que γ est de la *première famille* si tout point de D est équivalent par γ à un point au moins d'un compact K convenablement choisi dans D :

$$D=\bigcup_{f\in\gamma} f(K);$$

cela revient à dire que l'espace quotient $\frac{D}{\gamma}$ est compact; l'expression « première

(2) Ou transformations analytiques biunivoques de D en lui-même.

famille » a ainsi le même sens que dans la classification de Poincaré [12], mais peut, contrairement à cette classification, être appliquée à des groupes non discontinus.

Bien que certains passages de ce Mémoire supposent seulement que γ soit discontinu (n^{os} 5-6), ou seulement qu'il soit de la première famille (th. 4), il s'agira essentiellement d'un groupe à la fois discontinu et de la 1re famille; de tels groupes existent dans le bicercle $|x|<1$, $|y|<1$ et dans l'hypersphère $|x|^2+|y|^2<1$ [13]; il se peut, d'ailleurs, que tout domaine borné, à deux dimensions complexes, admettant un groupe d'automorphismes à la fois discontinu et de la 1re famille, se ramène, par une transformation analytique biunivoque, au bicercle ou à l'hypersphère.

Si γ est à la fois discontinu et de la 1re famille, le nombre $q(z)$ défini au n° 1 est borné sur tout le domaine D; il divise donc un entier positif q, que nous prendrons le plus petit possible, tel que $f\in\gamma$ et $f(z_0)=z_0$ entraînent $[\mathrm{D}f(z_0)]^q=1$; ce nombre q peut être appelé *période* du groupe γ. Pour un groupe fuchsien de la 1re famille [12], c'est le PPCM des nombres β_i tels que $\frac{2\pi}{\beta_i}$ soit la somme des angles du polygone fondamental aux divers sommets d'un cycle elliptique.

3. Étant donné un entier m, nous appellerons *fonction fuchsienne de dimension m* relative à γ toute fonction $\theta(z)$ *holomorphe* sur D et vérifiant les identités

$$\theta[f(z)]\equiv\theta(z)[\mathrm{D}f(z)]^{-m} \qquad \text{pour tout} \quad f\in\gamma. \tag{1}$$

Comme on le verra plus loin (n° 13), relativement à un groupe γ à la fois discontinu et de la 1re famille, toute fonction méromorphe sur D et vérifiant les identités (1) est le quotient de deux fonctions fuchsiennes dont les dimensions ont pour différence m; en particulier, toute *fonction automorphe* relative à γ, c'est-à-dire toute fonction $\varphi(z)$ méromorphe sur D et vérifiant

$$\varphi[f(z)]\equiv\varphi(z) \qquad \text{pour tout} \quad f\in\gamma, \tag{2}$$

est quotient de deux fonctions fuchsiennes de même dimension.

La *série de Poincaré* formée à partir d'une fonction $u(z)$ holomorphe sur D :

$$\sum_{f\in\gamma} u[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^m,$$

satisfait formellement aux identités (1); on démontre [5] ou [10], en supposant seulement γ discontinu, que la série de terme général $|\mathrm{D}f(z)|^2$ converge normalement sur tout compact. On obtient donc une fonction fuchsienne de dimension $m\geqq 2$, relative à un groupe γ discontinu, en formant une série de Poincaré relative à une fonction $u(z)$ bornée sur D (par exemple un polynome), plus généralement à une fonction $u(z)$ telle que les fonctions $u[f(z)][Df(z)]^{m-2}$ (associées aux divers $f \in \gamma$) soient bornées dans leur ensemble sur tout compact.

On obtient aussi des fonctions fuchsiennes, d'une part par multiplication de fonctions fuchsiennes, d'autre part par combinaison linéaire, à coefficients complexes, de fonctions fuchsiennes de même dimension : les fonctions fuchsiennes de dimension m relatives à un groupe γ forment un espace vectoriel complexe dont la dimension (qui peut *a priori* être ∞) sera notée $d(m)$. D'autre part, si $\theta(z)$ et $\theta'(z)$ sont deux fonctions fuchsiennes de dimensions m et m', $\frac{\theta(z)}{\theta'(z)}$ en est une de dimension $m-m'$, pourvu que ce quotient soit holomorphe sur D, ce que nous énoncerons : $\theta(z)$ *divisible* par $\theta'(z)$ sur D.

Nous nous proposons, relativement à un groupe à la fois discontinu et de la 1re famille, d'une part de déterminer $d(m)$, d'autre part de reconnaître si toute fonction fuchsienne est somme d'une série de Poincaré; ces buts seront atteints (n° 18), du moins pour m assez grand, $m > m_0$.

4. Si E est une variété analytique dans D, c'est un ensemble fermé dans D et, si $z_0 = (x_0, y_0)$ est un point de E, ou bien c'est un point isolé de E, ou bien, au voisinage de ce point, E se compose d'un nombre fini de *rameaux* (3) au point z_0, dont chacun est défini, soit par $x = x_0$, soit par $y - y_0 = \mathfrak{S}\left[(x-x_0)^{\frac{1}{n}}\right]$, n étant un entier positif, $\mathfrak{S}$ une série entière sans terme constant, où les exposants des termes non nuls sont premiers dans leur ensemble avec n. Ainsi, un voisinage convenable de z_0 sur le rameau considéré est mis en correspondance biunivoque avec un disque $|t| < r_0$, où $t = y - y_0$ dans le 1er cas, $t = (x - x_0)^{\frac{1}{n}}$ dans le 2e cas, et r_0 est inférieur, dans le 2e cas, au rayon de convergence de $\mathfrak{S}$: t sera appelé *paramètre local* attaché au point z_0 et au rameau considéré.

La variété E sera dite *ramifiée* en un point z_0 de E si elle a plusieurs rameaux en ce point; s'il en est ainsi, dans un voisinage convenable de z_0, z_0 est le seul point commun à deux de ces rameaux; les points de E où E est ramifiée sont donc isolés.

Si $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe sur D s'annulant en un point z_0 de E, ou bien z_0 est point isolé de la variété $E \cap (\varphi = 0)$, ou bien $\varphi(z) \equiv 0$ au voisinage de z_0 sur un rameau (au moins) de E en z_0 et, par suite, sur toute la composante irréductible de E qui contient ce rameau [3].

Si $f \in \gamma$, f étant distinct de la transformation identique, $f(z) = z$ définit une variété analytique dans D, sur laquelle $|Df(z)| = 1$; sur un rameau de cette variété, $Df(z)$ est fonction holomorphe du paramètre local, donc, sur

(3) Expression employée de préférence à « composantes irréductibles au point z_0 », afin d'éviter toute confusion avec les composantes irréductibles globales.

une composante irréductible de cette variété, $Df(z) = \text{const.}$; parmi ces composantes irréductibles, considérons celles où $Df(z) \neq 1$ et cela pour tous les automorphismes de γ : γ étant discontinu, on obtient une variété analytique Q dans D, qui est le lieu des points z de D, où $q(z) > 1$ et, par suite, est conservée par les automorphismes de γ :

$$f(Q) = Q \quad \text{pour} \quad f \in \gamma.$$

II. — Propriétés préliminaires des fonctions fuchsiennes.

5. Théorème 1. — *Étant donné le groupe discontinu* γ, *un point* z_0 *de* D *que ne laisse fixe aucun automorphisme de* γ (*sauf la transformation identique*), $\frac{h(h+1)}{2}$ *nombres complexes et un nombre positif* ε, *pour* m *assez grand il existe une fonction fuchsienne* $\theta(z)$ *de dimension* m *telle que les valeurs prises en* z_0 *par* $\theta, \frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{h-1}\theta}{\partial y^{h-1}}$ *diffèrent respectivement de moins de* ε *des* $\frac{h(h+1)}{2}$ *valeurs données.*

Puisque $\sum_{f\in\gamma} |Df(z_0)|^2 < +\infty$, les $f \in \gamma$ tels que $|Df(z_0)| \geq 1$, parmi lesquels figure la transformation identique, soit f_1, sont en nombre fini, soit $f_1, \ldots, f_p$; on peut trouver un polynome $u(z)$ tel que $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{h-1} u}{\partial y^{h-1}}$ prennent, au point z_0 les $\frac{h(h+1)}{2}$ valeurs données, aux points $f_2(z_0), \ldots, f_p(z_0)$ la valeur o; si

$$\theta_1(z) \equiv \sum_{i=1}^{p} u[f_i(z)][Df_i(z)]^m,$$

quel que soit m, $\theta_1, \frac{\partial\theta_1}{\partial x}, \frac{\partial\theta_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{h-1}\theta_1}{\partial y^{h-1}}$ prennent au point z_0 les $\frac{h(h+1)}{2}$ valeurs données; d'autre part, si $\theta(z)$ est la somme de la série de Poincaré de dimension m formée à partir de $u(z)$, $\theta(z) - \theta_1(z) \to 0$ (quand $m \to +\infty$) uniformément sur un voisinage convenablement choisi de z_0.

Conséquences. — Pour m assez grand, on peut trouver deux fonctions fuchsiennes de dimension m linéairement indépendantes; leur quotient est une fonction automorphe non constante. On peut, d'autre part, k étant convenablement choisi, trouver trois fonctions fuchsiennes $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de dimension k telles que

$$\theta_3(z_0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{D\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}, \frac{\theta_2}{\theta_3}\right)}{D(x, y)} \neq 0$$

au point z_0; alors les fonctions automorphes $\frac{\theta_1}{\theta_3}, \frac{\theta_2}{\theta_3}$ ne sont liées en particulier par aucune relation algébrique, et les monomes $\theta_1^n, \theta_1^{n-1}\theta_2, \ldots, \theta_3^n$ sont des fonctions fuchsiennes linéairement indépendantes de dimension kn : $d(kn) \geqq C_{n+2}^2$. Si k est tel qu'il existe des fonctions fuchsiennes non identiquement nulles de toute dimension au moins égale à k, $m - m' \geqq k$ entraîne $d(m) \geqq d(m')$; chaque entier $m (m \geqq 2k)$ peut s'écrire

$$m = kn + l, \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq l \leqq k - 1,$$

et l'on a

$$d(m) \geqq d[k(n-1)] \geqq C_{n+1}^2 > \frac{n^2}{2};$$

ainsi

$$\lim_{m=+\infty} \frac{d(m)}{m^2} \geqq \frac{1}{2k^2} > 0.$$

6. Le théorème 1 est, en général, en défaut en un point z_0 invariant par des automorphismes de γ (autres que la transformation identique), car l'identité (1) relative à chacun de ces automorphismes entraîne des relations entre les valeurs en z_0 d'une fonction fuchsienne et de ses dérivées partielles. En laissant de côté les dérivées partielles, on peut énoncer :

Théorème 2. — *Étant donné les points $z_1, \ldots, z_s$ (en nombre s fini quelconque) non équivalents par le groupe discontinu γ, un nombre complexe a_1 et un nombre positif ε, pour m assez grand et multiple de $q(z_1)$ (4), il existe une fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension m telle que*

$$|\theta(z_1) - a_1| < \varepsilon, \qquad |\theta(z_2)| < \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |\theta(z_s)| < \varepsilon.$$

Soient encore $f_1, \ldots, f_p$ les $f \in \gamma$ tels que $|Df(z_j)| \geqq 1$ pour l'un au moins des $z_j (1 \leqq j \leqq s)$; parmi ces automorphismes, figurent la transformation identique f_1 et tous les éléments du sous-groupe $\gamma(z_1)$ (4), soit $f_1, \ldots, f_r$ $(r \leqq p)$; on choisit un polynome $u(z)$ tel que

$$u(z_1) = \frac{a_1}{r}, \qquad u[f_i(z_1)] = 0 \qquad \text{pour} \quad r + 1 \leqq i \leqq p,$$

enfin

$$u[f_i(z_j)] = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq p \quad \text{et} \quad 2 \leqq j \leqq s,$$

conditions compatibles, puisque z_1 et z_j ne sont pas équivalents par γ. En conservant les notations θ et θ_1 du théorème 1, on a

$$\theta_1(z_2) = \ldots = \theta_1(z_s) = 0,$$

(4) Défini au n° 1.

quel que soit m et, d'autre part, $\theta - \theta_1 \to 0$ quand $m \to +\infty$ en chacun des points $z_1, \ldots, z_s$; enfin

$$\theta_1(z_1) = \frac{a_1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mathrm{D} f_i(z_1)]^m = a_1$$

si m est multiple de $q(z_1)$.

A noter que la valeur de m à partir de laquelle l'énoncé du théorème est vérifié dépend des points $z_1, \ldots, z_s$, de ε et de $\sup\limits_{\mathrm{D}} |u|$, quantité proportionnelle à $|a_1|$ pour des points $z_1, \ldots, z_s$ donnés.

Corollaire 1. — *Étant donné les points $z_1, \ldots, z_s$ non équivalents par γ, pour m assez grand et multiple de $q(z_1), \ldots, q(z_s)$ une fonction fuchsienne de dimension m peut prendre en $z_1, \ldots, z_s$ n'importe quel système de s valeurs.*

Les systèmes de valeurs prises en $z_1, \ldots, z_s$ par les diverses fonctions fuchsiennes de dimension m forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^s$, de dimension au plus égale à $d(m)$; s'il ne remplit pas $\mathcal{C}^s$, il admet un sous-espace perpendiculaire, sur lequel on considère un point, de coordonnées $a_1, \ldots, a_s$, à la distance 1 de l'origine

$$\sum_{j=1}^{s} |a_j|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{s} \bar{a}_j \theta(z_j) = 0$$

pour toute fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension m; de là résulte

$$\sum_{j=1}^{s} |\theta(z_j) - a_j|^2 \geqq 1;$$

mais, d'après le théorème 2, étant donné $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{s}}$, une fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension m peut vérifier les s conditions $|\theta(z_j) - a_j| < \varepsilon$, pourvu que m soit multiple de $q(z_1), \ldots, q(z_s)$ et au moins égal à un nombre m_0 dépendant de $z_1, \ldots, z_s$, ε, mais indépendant des a_j si chaque $|a_j| \leqq 1$, ce qui est le cas ici.

Corollaire 2. — *A tout point z_1 de* D *on peut associer un voisinage* V_1 *de ce point et un nombre m_1 tels que, pour $m \geqq m_1$ et m multiple de $q(z_1)$, il existe une fonction fuchsienne de dimension m ne s'annulant en aucun point de* V_1.

D'après le théorème 2, il existe deux fonctions fuchsiennes, $\theta_1(z)$ de dimension $kq(z_1)$, $\theta_2(z)$ de dimension $(k+1)q(z_1)$ ne s'annulant ni l'une ni l'autre au point z_1, ni par suite sur un voisinage convenable V_1 de ce point; tout entier assez grand peut s'écrire $kn_1 + (k+1)n_2$, n_1 et n_2 étant deux entiers positifs, et $\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}$ est une fonction fuchsienne de dimension $[kn_1 + (k+1)n_2]q(z_1)$, ne s'annulant en aucun point de V_1.

7. Si le groupe γ est à la fois discontinu et de la 1^re^ famille, on peut d'abord, dans les énoncés du théorème 2 et de ses corollaires, remplacer les nombres $q(z)$ par la période q de γ, définie au n° 2; mais surtout :

THÉORÈME 3. — *Si le groupe γ est à la fois discontinu et de la 1^re^ famille, il existe un nombre* μ, ne dépendant que de γ, *tel que, étant donné un ensemble fini ou dénombrable* $X \subset D$ *et un entier m au moins égal à μ et multiple de q, on puisse trouver une fonction fuchsienne de dimension m ne s'annulant en aucun point de* X.

γ étant de la 1^re^ famille, soit le compact K tel que $D = \bigcup_{f \in \gamma} f(K)$; comme une fonction fuchsienne s'annule en même temps en deux points équivalents par γ, on peut supposer $X \subset K$; le corollaire 2 fait correspondre à chaque point z_1 de D un ensemble ouvert V_1 contenant z_1 et un nombre m_1; d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut trouver les points z_j, en nombre fini s, tels que la réunion des ensembles V_j correspondants couvre K. Soit $\mu = \operatorname{Max}_{1 \leqq j \leqq s} m_j$: si m est au moins égal à μ et multiple de q, alors, pour chaque j, m est au moins égal à m_j et multiple de $q(z_j)$, donc il existe une fonction fuchsienne $\theta_j(z)$ de dimension m ne s'annulant en aucun point de V_j; la forme linéaire (en λ_j) $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \theta_j(z)$ n'est identiquement nulle pour aucun point z de K; étant donné de telles formes, en nombre fini ou en infinité dénombrable, on peut choisir les λ_j n'annulant aucune d'elles.

THÉORÈME 4. — *Relativement à un groupe de la 1^re^ famille, toute fonction fuchsienne de dimension négative est identiquement nulle; toute fonction fuchsienne de dimension* o *est une constante; toute fonction fuchsienne de dimension positive a une variété de zéros non vide.*

Si une fonction fuchsienne $\theta(z)$ de dimension $m < 0$ n'est pas identiquement nulle, on peut trouver une suite de points $z_k \in D$, sans points d'accumulation dans D, telle que

$$\theta(z_1) \neq 0 \quad \text{et} \quad |\theta(z_{k+1})| \geqq |\theta(z_k)|;$$

pour chaque k,

$$z_k = f_k(w_k), \quad \text{avec} \quad f_k \in \gamma \quad \text{et} \quad w_k \in K;$$

toute suite convergente extraite de la suite f_k a pour limite, uniforme sur K, une transformation dégénérée, à déterminant fonctionnel identiquement nul; ainsi

$$Df_k(w_k) \to 0 \quad \text{et} \quad \theta(z_k) = \theta(w_k)[Df_k(w_k)]^{-m} \to 0.$$

Si $\theta(z)$ est une fonction fuchsienne de dimension o, c'est-à-dire une fonction automorphe holomorphe sur D,

$$\sup_{D} |\theta| = \sup_{K} |\theta|.$$

Si, enfin, $\theta(z)$ est une fonction fuchsienne de dimension > 0 ne s'annulant en aucun point de D, $\frac{1}{\theta(z)}$ est une fonction fuchsienne de dimension < 0 non identiquement nulle.

8. L'hypothèse, jusqu'à présent inutile, que le nombre des variables est 2, nous sert lorsque nous considérons une variété analytique E dans D (*cf.* n° 4):

THÉORÈME 5. — *Étant donné une variété analytique* E *dans* D *et un entier m au moins égal à* μ *et multiple de q, on peut trouver une fonction fuchsienne* $\theta(z)$ *de dimension m telle que la variété* $E \cap (\theta = 0)$ *n'ait que des points isolés.*

Si cette variété a un point non isolé, $\theta(z) \equiv 0$ sur une composante irréductible au moins de E; on choisit donc un point sur chacune des composantes irréductibles de E, en nombre fini ou en infinité dénombrable [3], d'où un ensemble X auquel on applique le théorème 3.

Remarque. — L'emploi de ce théorème $3a$, sur celui du corollaire 1, l'avantage, important pour la suite, de donner le résultat pour $m \geqq \mu$ et m multiple de q, μ et q ne dépendant que de γ. Néanmoins, l'emploi du corollaire 1 est intéressant si la variété E est conservée par les automorphismes de γ et la variété $E \cap Q$ (*cf.* n° 4) réduite à des points isolés : pour démontrer le théorème 5, il suffit de marquer, sur chacune des composantes irréductibles non ponctuelles de E qui rencontrent K, un point $z_i \notin Q$, donc tel que $q(z_i) = 1$, d'où le résultat pour *toute* valeur de m au moins égale à un nombre qui peut dépendre de E.

THÉORÈME 6. — *Étant donné un entier k au moins égal à* μ *et multiple de q, on peut trouver une fonction fuchsienne* $\alpha(z)$ *de dimension k telle que la variété*

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

n'ait que des points isolés.

On choisit d'abord une fonction fuchsienne $\alpha_1(z) \not\equiv 0$, de dimension k; si la variété

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0$$

a des points non isolés, soit E cette variété, et $\alpha_2(z)$ une fonction fuchsienne de dimension k telle que la variété $E \cap (\alpha_2 = 0)$ n'ait que des points isolés; K désignant toujours un compact tel que $D = \bigcup_{f \in \gamma} f(K)$, l'ensemble $E \cap (\alpha_2 = 0) \cap K$ n'a qu'un nombre fini de points, soit $z_1, \ldots, z_r$.

Si l'on avait

$$\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \equiv \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y},$$

on aurait

$$\alpha_2(z) \equiv \lambda \alpha_1(z), \qquad \text{avec} \quad \lambda = \text{const.}$$

et $\alpha_1(z)$ répondrait à la question; ce cas écarté, les équations

$$\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}, \qquad \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}$$

définissent une variété analytique $E_1 \supset E$. Les points de E qui sont points d'accumulation de $E_1 - E$ sont isolés, car ce sont, soit des points isolés de E, soit des points où E_1 est ramifiée; ainsi l'ensemble $E \cap (E_1 - E)' \cap K$ n'a qu'un nombre fini de points, soit $z_{r+1}, \ldots, z_s$.

Pour chaque $j (1 \leqq j \leqq s)$, soit B_j une boule ouverte de centre z_j, de rayon assez petit pour que $\overline{B}_j \subset D$ et pour que la frontière S_j de B_j ne passe par aucun point $f(z_{j'}) (f \in \gamma;\ 1 \leqq j' \leqq s)$; l'ensemble

$$K_1 = \left(K - \bigcup_{j=1}^{s} B_j \right) + \bigcup_{\substack{f \in \gamma \\ 1 \leqq j \leqq s}} [K \cap f(S_j)]$$

est un compact contenu dans K et ne contenant aucun z_j; je dis que, pour λ constant non nul et $|\lambda|$ assez petit, la variété

$$\alpha_1 + \lambda \alpha_2 = \frac{\partial(\alpha_1 + \lambda \alpha_2)}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha_1 + \lambda \alpha_2)}{\partial y} = 0$$

n'a aucun point dans K_1.

Dans le cas contraire, en effet, on aurait deux suites λ_k et ζ_k telles que

$$\alpha_1(\zeta_k) + \lambda_k \alpha_2(\zeta_k) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(\zeta_k) + \lambda_k \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(\zeta_k) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(\zeta_k) + \lambda_k \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(\zeta_k) = 0,$$

$$\lambda_k \neq 0, \qquad \lambda_k \to 0, \qquad \zeta_k \in K_1, \qquad \zeta_k \to \zeta;$$

d'où

$$\zeta_k \in E_1 \qquad \text{et} \qquad \zeta \in E;$$

mais on ne peut avoir $\zeta_k \in E$, qui entraînerait $\alpha_2(\zeta_k) = 0$, ζ_k serait l'un des points $z_1, \ldots, z_r$; d'autre part, $\zeta_k \in E_1 - E$ donnerait $\zeta \in (E_1 - E)'$, ζ serait l'un des points $z_{r+1}, \ldots, z_s$.

Ainsi l'on peut trouver la fonction

$$\alpha(z) \equiv \alpha_1(z) + \lambda \alpha_2(z)$$

telle que la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

soit ε, n'ait aucun point dans K_1. Puisque

$$\alpha(z) \equiv \alpha[f(z)]\,[\mathrm{D}f(z)]^k \qquad \text{pour} \quad f \in \gamma,$$

tout point de ε a toutes ses images par γ sur ε, et l'une d'elles au moins dans K; ε n'ayant aucun point sur $\bigcup_{f\in\gamma}[K \cap f(S_j)]$, ε ne rencontre pas S_j, donc n'a qu'un nombre fini de points dans B_j; d'autre part, ε n'a aucun point dans $K - \bigcup_{j=1}^{s} B_j$, donc n'a qu'un nombre fini de points dans K.

Remarque. — Une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ de dimension k s'annule, ainsi que $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, sur une variété de dimension 1 conservée point par point par un automorphisme $f \in \gamma$, lorsque sur cette variété

$$[\mathrm{D}f(z)]^k \neq 1 \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{D}f(z)]^{k+1} \neq 1;$$

le théorème 6 pourrait donc être en défaut si k n'était pas multiple de q.

III. — Classes E-fuchsiennes.

9. Le groupe γ étant à la fois discontinu et de la 1$^{\text{re}}$ famille, soit E une variété analytique dans D conservée (dans son ensemble) par chaque automorphisme appartenant au groupe γ :

$$f(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \qquad \text{pour} \quad f \in \gamma.$$

Il en est ainsi, par exemple, de la variété de zéros d'une fonction fuchsienne de dimension positive relative à γ, ou de la variété d'infinis d'une fonction automorphe non constante, variétés qui ne peuvent être vides (th. 4) et sont, d'autre part, sans point isolé.

m étant un entier, nous appellerons *fonction* E-*fuchsienne de dimension m* relative à γ toute fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D et vérifiant, pour $z \in \mathrm{E}$, les relations

$$(1) \qquad \varphi[f(z)] = \varphi(z)\,[\mathrm{D}f(z)]^{-m} \qquad \text{pour tout} \quad f \in \gamma;$$

deux fonctions E-fuchsiennes de même dimension seront dites *équivalentes* si elles prennent la même valeur en tout point de E. L'ensemble des fonctions E-fuchsiennes équivalentes à une fonction E-fuchsienne $\varphi(z)$ de dimension m

sera appelé *classe* E-*fuchsienne* de dimension m et noté (φ); une classe E-fuchsienne de dimension m sera dite *fuchsienne* si elle contient au moins une fonction fuchsienne de dimension m. Une classe E-fuchsienne a une valeur en tout point de E.

Les classes E-fuchsiennes de dimension m et les classes fuchsiennes de dimension m forment deux espaces vectoriels complexes dont les dimensions seront notées respectivement $\delta_E(m)$ et $d_E(m)$: $d_E(m) \leqq \delta_E(m)$; l'origine de ces deux espaces est la classe fuchsienne (o), formée de toutes les fonctions holomorphes sur D et identiquement nulles sur E.

Si, en particulier, E est la variété de zéros de la fonction fuchsienne $\alpha(z)$ fournie par le théorème 6, cette classe (o) se compose des fonctions holomorphes sur D et divisibles par $\alpha(z)$: en effet, quelle que soit la fonction $\alpha(z)$ holomorphe sur D, toute fonction nulle sur la variété $\alpha = 0$ est divisible, au voisinage d'un point z_0 de cette variété, par le produit des facteurs irréductibles de $\alpha(z)$ en ce point; et d'autre part, si un de ces facteurs figurait plus d'une fois dans $\alpha(z)$, tout zéro de ce facteur appartiendrait à la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

qui aurait donc des points non isolés.

Les classes E-fuchsiennes (resp. fuchsiennes) (φ_1) de dimension m_1, (φ_2) de dimension m_2, ont pour produit une classe E-fuchsienne (resp. fuchsienne) $(\varphi_1)(\varphi_2)$ de dimension $m_1 + m_2$; si $(\varphi_1)(\varphi_2) = (0)$, $(\varphi_2) \neq (0)$ n'entraîne pas nécessairement $(\varphi_1) = (0)$, mais seulement (φ_1) nulle identiquement sur une composante irréductible de E au moins. D'après les théorèmes 3 et 5, pour $m_1 \geqq \mu$ et m_1 multiple de q, on peut choisir (φ_1) de manière que $(\varphi_1)(\varphi_2) = (0)$ entraîne $(\varphi_2) = (0)$.

10. On sait, d'autre part [13], que D, admettant un groupe d'automorphismes de la 1re famille, est domaine d'holomorphie; si donc la variété E est réduite à des points isolés, on peut [4, n° 33] se donner arbitrairement les valeurs en ces points d'une fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D; si l'on veut que $\varphi(z)$ soit E-fuchsienne de dimension m, ces valeurs sont déterminées par p d'entre elles (p étant le nombre des classes d'équivalence par γ des points de E), soit $\varphi(z_i)$; mais $\varphi(z_i)$ n'est arbitraire que si m est multiple de $q(z_i)$, sinon $\varphi(z_i) = 0$. Ainsi, *quel que soit l'entier m*, $\delta_E(m)$ est le nombre des indices i pour lesquels $q(z_i)$ divise m : c'est une fonction du reste r de la division de m par q. Le corollaire 1 (n° 6) conduit au même résultat pour $d_E(m)$, mais seulement *pour m assez grand*.

Si E n'est pas réduite à des points isolés, on peut marquer deux points z_1, z_2 non équivalents par γ sur une même composante irréductible de E, puis, k étant convenablement choisi, multiple de $q(z_1)$ et $q(z_2)$, trouver deux fonctions fuchsiennes θ_1, θ_2 de dimension k telles que $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ prenne deux valeurs déterminées distinctes en z_1 et z_2; alors $(\theta_1)^n$, $(\theta_1)^{n-1}(\theta_2)$, ..., $(\theta_2)^n$ sont des classes fuchsiennes linéairement indépendantes de dimension kn, car sinon l'on aurait $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \text{const.}$ sur chaque composante irréductible de E. D'autre part (*cf.* n° 9), $m - m' \geqq \mu$ et $m - m'$ multiple de q entraînent $d_E(m) \geqq d_E(m')$; le raisonnement fait à la fin du n° 5 ne s'applique que pour m multiple du PGCD de k et q, donc, au mieux, pour m multiple du PPCM de $q(z_1)$ et $q(z_2)$; ainsi

$$\overline{\lim_{m=+\infty}} \frac{d_E(m)}{m} > 0.$$

Mais si, de plus, une composante irréductible non ponctuelle de E n'a en commun avec la variété Q(*cf.* n° 4) que des points isolés, on peut, sur cette composante, choisir z_1 et z_2 tels que

$$q(z_1) = q(z_2) = 1,$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$\underline{\lim}_{m=+\infty} \frac{d_E(m)}{m} > 0.$$

Ces premières indications seront précisées plus loin (n° 20).

11. Théorème 7. — *Si la variété* E *est* sans point isolé, *toute classe* E-*fuchsienne de dimension négative est la classe* (0).

Si une fonction E-fuchsienne $\varphi(z)$ de dimension négative n'est pas identiquement nulle sur E, le raisonnement employé au théorème 4 montre que $\sup_E |\varphi|$ est atteinte en un point $z_0 \in E$; comme z_0 n'est pas point isolé de E, par z_0 passe au moins un rameau de E, défini paramétriquement (*cf.* n° 4) par

$$(2) \qquad x = x_0 + t^n, \qquad y = y_0 + \mathfrak{S}(t), \qquad |t| < r_0;$$

la fonction $\varphi[x_0 + t^n, y_0 + \mathfrak{S}(t)]$ est holomorphe pour $|t| < r_0$ et son module est maximum à l'origine; ainsi $\varphi(z) = \text{const.}$ sur le rameau considéré, donc [3] sur la composante irréductible ε de E qui le contient; comme ε a des points d'accumulation sur la frontière de D, la valeur constante de $\varphi(z)$ sur ε est 0; ainsi

$$\sup_E |\varphi| = 0.$$

Remarque. — En appliquant le théorème 7 à la variété de zéros d'une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ fournie par le théorème 6, on peut montrer [7] l'existence de $\lim_{m=\infty} \frac{d(m)}{m^2}$; mais un résultat plus complet sera obtenu plus loin (n° 18).

Corollaire 3. — *Si la variété* E, *conservée par les automorphismes appartenant à* γ, *n'est pas réduite à des points isolés, une fonction fuchsienne de dimension positive ne peut être non nulle en tout point de* E.

En retirant de E ses points isolés, on obtient une variété E_1 conservée par les automorphismes de γ et sans point isolé; si une fonction fuchsienne $\theta(z)$, de dimension positive, était non nulle en tout point de E_1, $\frac{1}{\theta(z)}$ serait holomorphe au voisinage de E_1; D étant domaine d'holomorphie, il existerait [4, n° 33] une fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D et telle que $\varphi(z)=\frac{1}{\theta(z)}$ pour $z\in E_1$, donc E_1-fuchsienne de dimension négative.

Corollaire 4. — *Deux fonctions fuchsiennes de dimensions positives ont toujours une variété de zéros communs non vide.*

Corollaire 5. — *Si la variété* E, *conservée par les automorphismes de* γ, *et les fonctions fuchsiennes* $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, *de même dimension positive, sont telles que la variété* $E\cap(\theta_1=\theta_2=0)$ *soit vide* [5], *alors, quel que soit le scalaire* λ, *la variété* $E\cap(\theta_1+\lambda\theta_2=0)$ *n'a que des points isolés.*

On suppose $\lambda\neq 0$ et applique le corollaire 3 à la variété $E\cap(\theta_1+\lambda\theta_2=0)$ et à la fonction fuchsienne θ_1.

12. Théorème 8. — *Le rapport* $\frac{\delta_E(m)}{m}$ *est borné.*

En chaque point z_0 de la variété analytique E_1 obtenue en retirant de E ses points isolés, et sur chaque rameau ρ_0 de E_1 en z_0, défini paramétriquement par (2) (on suppose $\bar{\rho}_0\subset D$), soit σ_0 l'ensemble défini par $|t|<\frac{r_0}{2}$; d'après le théorème de Borel-Lebesgue, il suffit, pour couvrir $E_1\cap K$ [6], d'un nombre fini d'ensembles tels que σ_0, soient $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$, associés aux points $z_0, \ldots, z_r$; soient, d'autre part, $z_{r+1}, \ldots, z_s$ les points isolés de E situés dans K. Pour chaque fonction E-fuchsienne $\varphi(z)$, on peut développer $\varphi[x_0+t^n, y_0+\mathfrak{S}(t)]$ en série de puissances de t : ce développement, étant le même pour toutes les fonctions d'une même classe E-fuchsienne, peut être appelé développement de Taylor de cette classe au point z_0 sur ρ_0.

Soit (φ) une classe E-fuchsienne de dimension m, nulle en $z_{r+1}, \ldots, z_s$ et dont les développements de Taylor, au point z_j sur $\rho_j (0\leq j\leq r)$, ne comportent pas de termes de degré inférieur à h; si $\varphi(z)$ est une fonction E-fuchsienne de cette classe, supposée non nulle, $\sup\limits_{E\cap K}|\varphi|>0$, et cette borne

[5] Les théorèmes 3 et 5 permettent de trouver de telles fonctions, en commençant par une fonction θ_1 telle que la variété $E\cap(\theta_1=0)$ n'ait que des points isolés.

[6] K est l'ensemble défini au n° 2.

est atteinte en un point $\zeta \in E_1 \cap \bar{K}$; on a, par exemple, $\zeta \in \sigma_0$ et ζ correspond, sur le rameau ρ_0, à la valeur τ du paramètre local t; par hypothèse,

$$\psi(t) \equiv \frac{\varphi[x_0 + t^n, y_0 + \mathcal{S}(t)]}{t^h}$$

est holomorphe pour $|t| < r_0$, donc

$$|\psi(\tau)| \leqq \sup_{|t|=2|\tau|} |\psi(t)|,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(\zeta)| \leqq \frac{1}{2^h} \sup_{\rho_0} |\varphi(z)|.$$

Comme les conditions $f \in \gamma$, $z \in K$, $f(z) \in \bigcup_{j=0}^{r} \rho_j$ ne sont satisfaites que pour un nombre fini d'automorphismes f, $\frac{1}{|Df(z)|}$ a dans ces conditions une borne supérieure finie λ, ne dépendant que de γ et E, et l'on a

$$2^h \leqq \lambda^m, \qquad h \leqq \frac{\log \lambda}{\log 2} m.$$

Si donc h est le premier entier supérieur à $\frac{\log \lambda}{\log 2} m$, les $(s - r) + (r + 1) h$ conditions linéaires imposées à (φ) entraînent $(\varphi) = (0)$, donc

$$\delta_E(m) \leqq (s - r) + (r + 1) h.$$

Corollaire 6. — *Pour toute variété* E *conservée par les automorphismes de* γ, *il existe des fonctions fuchsiennes identiquement nulles sur* E, *mais non dans* D.

Dans le cas contraire, des fonctions fuchsiennes linéairement indépendantes appartiendraient à des classes E-fuchsiennes linéairement indépendantes, d'où $\delta_E(m) \geqq d(m)$, contrairement au théorème précédent et au résultat du n° 5.

13. Corollaire 7. — *Toute fonction* $\omega(z)$ *méromorphe sur* D *et vérifiant les identités*

$$\omega[f(z)] \equiv \omega(z)[Df(z)]^{-m}$$

pour tout $f \in \gamma$ (*où* $m \gtrless 0$) *est le quotient de deux fonctions fuchsiennes de dimensions positives.*

Soit $\theta(z)$ une fonction fuchsienne de dimension $p > 0$, identiquement nulle, non dans D, mais sur la variété E d'infinis de $\omega(z)$; chaque point z_0 de E a un voisinage ouvert V_0 où

$$\omega(z) \equiv \frac{g_0(z)}{h_0(z)},$$

g_0 et h_0 étant holomorphes sur V_0 ainsi que les facteurs irréductibles de h_0 au point z_0, et θ divisible, sur V_0, par le produit de ces facteurs irréductibles; si n_0 est le plus grand des exposants auxquels ces facteurs figurent dans h_0, $[\theta(z)]^{n_0}\omega(z)$ est holomorphe sur V_0; comme on peut couvrir $E \cap K$ à l'aide d'un nombre fini d'ensembles tels que V_0, il existe un entier $n > 0$ tel que $[\theta(z)]^n\omega(z)$ soit holomorphe au voisinage de tout point de $E \cap K$, donc sur D; et c'est une fonction fuchsienne de dimension $m + np$.

Remarque. — Il résulte aussi du théorème 8 que étant donné trois classes E-fuchsiennes (φ_1), (φ_2), (φ_3) de même dimension, il existe un polynome homogène P à trois variables, non identiquement nul, tel que $P[(\varphi_1), (\varphi_2), (\varphi_3)] = (0)$: en effet, les C^2_{n+2} classes E-fuchsiennes $(\varphi_1)^n$, $(\varphi_1)^{n-1}(\varphi_2)$, ..., $(\varphi_3)^n$ ne peuvent être linéairement indépendantes dès que n est assez grand.

COROLLAIRE 8. — *Trois fonctions automorphes relatives à γ sont liées par une relation algébrique.*

Puisque (cor. 7) toute fonction automorphe est quotient de deux fonctions fuchsiennes, il suffit de montrer qu'étant donné quatre fonctions fuchsiennes θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 de même dimension, il existe un polynome homogène P à quatre variables, non identiquement nul, tel que $P(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \equiv 0$: cela résulte, comme dans la remarque ci-dessus, de ce que le rapport $\dfrac{d(m)}{m^2}$ est borné [6], propriété retrouvée plus loin (n° 18).

On a ainsi une démonstration plus élémentaire, mais valable seulement pour deux variables, d'un théorème établi par M. Siegel [13] pour un nombre quelconque de variables.

IV. — Classes E-fuchsiennes relatives à une variété E particulière : applications aux fonctions fuchsiennes.

14. Étant donné un entier k au moins égal à μ et multiple de q, il existe (th. 6) une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ de dimension k telle que la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

n'ait que des points isolés : c'est une combinaison linéaire de deux fonctions fuchsiennes $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$ de dimension k, choisies, α_1 arbitrairement, α_2 telle que la variété

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \alpha_2 = 0$$

n'ait que des points isolés.

Étant donné la variété analytique Q définie au n° 4, on peut imposer à α_1 et α_2 les conditions supplémentaires suivantes : la variété $Q \cap (\alpha_1 = 0)$ n'a que des points isolés (th. 5) et $\alpha_2 \neq 0$ en tout point de celle-ci (th. 3); alors (cor. 5, n° 11) la variété $Q \cap (\alpha = 0)$ n'a que des points isolés.

Dans toute la suite, ε sera la variété de zéros d'une fonction fuchsienne $\alpha(z)$ ainsi choisie *une fois pour toutes;* ce choix entraîne les propriétés suivantes des classes ε-fuchsiennes.

a. La classe (o) se compose des fonctions holomorphes sur D et divisibles par $\alpha(z)$ (n° 9);

b. Pour $m \geqq m_0$, il existe une classe ε-fuchsienne (φ_1) de dimension m telle que $(\varphi_1)(\varphi_2) = (0)$ entraîne $(\varphi_2) = (0)$ (n^{os} 8, remarque, et 9).

D'autre part, k_1 étant au moins égal à μ et multiple de q, soient $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ deux fonctions fuchsiennes de dimension k_1 telles que :

c. La variété $\varepsilon \cap (\beta_1 = 0)$ est réduite à des points isolés et $\beta_2 \neq 0$ en tout point de celle-ci (th. 3 et 5).

Le changement de β_1 en $\beta_1 + \lambda\beta_2$ conserve la propriété c (cor. 5, n° 11) et déplace, d'aussi peu que l'on veut, les points de ε où $\beta_1 = 0$, donc permet, ces points étant répartis en p_1 classes d'équivalence par γ, contenant chacune un point ζ_i, de faire sur les ζ_i les hypothèses suivantes :

d. Les ζ_i n'appartiennent, ni à Q, ni à la variété

$$\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

de sorte qu'en un point $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$, ε a un seul rameau défini par exemple par $y - \eta_i = \mathfrak{S}(x - \xi_i)$, $\mathfrak{S}$ étant une série entière sans terme constant;

e. L'équation $\beta_1[x, \eta_i + \mathfrak{S}(x - \xi_i)] = 0$ admet $x = \xi_i$ comme racine simple.

Les propriétés c à e seront remplies dans toute la suite par les fonctions β_1, β_2, dont la dimension k_1 pourra varier en restant au moins égale à μ et multiple de q.

15. Voici les premières conséquences des propriétés a à e :

f. D'après c, les fonctions $\alpha(z)$, $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ n'ont aucun zéro commun; D étant domaine d'holomorphie, il existe [4, n° 32] trois fonctions $u(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$, holomorphes sur D, telles que

$$\alpha u + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \equiv 1.$$

g. D'après d et e, pour toute fonction $\varphi(z)$ holomorphe au point ζ_i et telle que

$$\varphi(\zeta_i) = 0,$$

$\varphi[x, \eta_i+\mathfrak{S}(x-\xi_i)]$ est divisible par $\beta_1[x, \eta_i+\mathfrak{S}(x-\xi_i)]$ au voisinage de ζ_i, tandis que $\varphi(x, y)-\varphi[x, \eta_i+\mathfrak{S}(x-\xi_i)]$ et $\beta_1(x, y)-\beta_1[x, \eta_i+\mathfrak{S}(x-\xi_i)]$ sont divisibles par $y-\eta_i-\mathfrak{S}(x-\xi_i)$, donc par α. Ainsi, toute fonction de z holomorphe et nulle au point ζ_i appartient à l'idéal engendré en ce point par $\alpha(z)$ et $\beta_1(z)$; de même en un point équivalent par γ à ζ_i.

h. L'idéal de fonctions holomorphes sur D engendré par $\alpha(z)$ et $\beta_1(z)$ est fermé [4, n° 32] et engendre, en un point ζ_i ou équivalent par γ à un ζ_i, l'idéal des fonctions holomorphes et nulles en ce point, en tout autre point l'idéal de toutes les fonctions holomorphes en ce point; ainsi [4, n° 30], pour qu'une fonction holomorphe sur D soit de la forme $\alpha\psi+\beta_1\varphi_1$, $\psi(z)$ et $\varphi_1(z)$ étant holomorphes sur D, il faut et il suffit qu'elle s'annule aux p_1 points ζ_i et en tous les points qui leur sont équivalents par γ.

16. Théorème 9. — *Pour m assez grand* ($m \geqq M_1$), *on a* (*cf.* n° 9) $\delta_\varepsilon(m)=\lambda m+\rho_1(r)$, *r étant le reste de la division de m par q*, λ *ne dépendant que de* ε (*d'une manière précisée au n°* 18).

D'après la propriété *d* du n° 14, on peut appliquer le corollaire 1 (n° 6) aux points ζ_i avec $q(\zeta_i)=1$: pour $m \geqq M_1$, on peut se donner arbitrairement les valeurs en ces points d'une fonction fuchsienne, *a fortiori* ε-fuchsienne, de dimension m, et les classes ε-fuchsiennes de dimension m nulles aux points ζ_i forment un espace vectoriel de dimension $\delta_\varepsilon(m)-p_1$. D'autre part, on vient de voir (h) que, si une fonction ε-fuchsienne $\varphi(z)$ s'annule aux points ζ_i, on a

$$\varphi(z)\equiv\alpha(z)\,\psi(z)+\beta_1(z)\,\varphi_1(z),$$

ψ et φ_1 étant holomorphes sur D; les relations

$$(1)\qquad \varphi[f(z)]=\varphi(z)\,[\mathrm{D}f(z)]^{-m} \qquad \text{pour } f\in\gamma,\quad z\in\varepsilon$$

entraînent

$$(2)\qquad \varphi_1[f(z)]=\varphi_1(z)\,[\mathrm{D}f(z)]^{-(m-k_1)} \qquad \text{pour } f\in\gamma,\quad z\in\varepsilon \ \text{ et } \ \beta_1(z)\neq 0,$$

restriction qui disparaît aussitôt puisque $\beta_1(z)$ ne s'annule sur ε qu'en des points isolés; ainsi toute classe ε-fuchsienne (φ) de dimension m nulle aux points ζ_i s'écrit $(\varphi)=(\beta_1)(\varphi_1)$, (φ_1) étant une classe ε-fuchsienne de dimension $m-k_1$. Enfin, le produit de (β_1) par une classe non nulle ne peut être nul, donc

$$\delta_\varepsilon(m)-p_1=\delta_\varepsilon(m-k_1) \qquad \text{pour} \quad m\geqq M_1.$$

Ainsi, dans un plan auxiliaire, les points de coordonnées m, $\delta_\varepsilon(m)$ dont les abscisses $m\equiv l_1 \pmod{k_1}$ sont alignés pour m assez grand; de même, pour les points d'abscisses $m\equiv l_2\,[\mathrm{mod}(k_1+q)]$; or ces deux ensembles ont une infinité de points communs pourvu que $l_2 \equiv l_1 \pmod{q}$; donc tous les points d'abscisses $m \equiv r \pmod{q}$ sont alignés pour m assez grand :

$$\delta_\varepsilon(m) = \lambda(r)\, m + \rho_1(r) \qquad \text{pour} \quad m \geqq M_1.$$

Enfin, d'après la propriété b du n° 14,

$$\delta_\varepsilon(m) \geqq \delta_\varepsilon(m') \qquad \text{dès que} \quad m - m' \geqq m_0;$$

par suite, λ est indépendant de r.

Remarque. — Une autre conséquence de cette démonstration est que le nombre $\frac{p_1}{k_1} = \lambda$ ne dépend que de ε. Ce théorème 9 précise le théorème 8, mais seulement pour une variété ε.

17. Lemme. — *Pour $m \geqq M_1$, toute classe ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$ s'écrit $(\beta_1)(\varphi_1) + (\beta_2)(\varphi_2)$, (φ_1) et (φ_2) étant deux classes de dimension m dont la seconde au moins est fuchsienne.*

Pour $m \geqq M_1$, on peut (*cf.* n° 16) se donner arbitrairement les valeurs aux points ζ_i d'une fonction fuchsienne $\varphi_2(z)$ de dimension m : comme (*cf.* n° 14, c) $\beta_2(\zeta_i) \neq 0$, on peut poser

$$\varphi_2(\zeta_i) = \frac{\varphi(\zeta_i)}{\beta_2(\zeta_i)}$$

quelle que soit la fonction $\varphi(z)$ holomorphe sur D; si celle-ci est ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$ on a du même coup

$$\varphi_2(z) = \frac{\varphi(z)}{\beta_2(z)}$$

en tout point z équivalent par γ à un ζ_i; alors (*cf.* n° 15, h)

$$\varphi - \beta_2\varphi_2 \equiv \alpha\psi + \beta_1\varphi_1,$$

$\psi(z)$ et $\varphi_1(z)$ étant holomorphes sur D; comme $\varphi - \beta_2\varphi_2$ est une fonction ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$, le raisonnement du n° 16 montre que φ_1 en est une de dimension m.

Théorème 10. — *Pour m assez grand $(m \geqq M)$, on a $d_\varepsilon(m) = \lambda m + \rho(r)$.*

Choisissons d'une part les $(\varphi_1)_{j_1}$, où

$$1 \leqq j_1 \leqq \delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m - k_1),$$

formant, avec les produits de (β_2) par les classes fuchsiennes de dimension $m - k_1$, une base des classes ε-fuchsiennes de dimension m; d'autre part, les $(\varphi_2)_{j_2}$, où $1 \leqq j_2 \leqq d_\varepsilon(m)$, formant une base des classes fuchsiennes de dimension m; d'après le lemme, toute classe ε-fuchsienne de dimension $m + k_1$

(où $m \geqq M_1$) est combinaison linéaire des classes $(\beta_1)(\varphi_1)_{j_1}$ et $(\beta_2)(\varphi_2)_{j_2}$, donc

$$\delta_\varepsilon(m+k_1) \leqq \delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m-k_1) + d_\varepsilon(m).$$

Or, au n° 16, on a trouvé, pour $m \geqq M_1$,

$$\delta_\varepsilon(m) - \delta_\varepsilon(m-k_1) = \delta_\varepsilon(m+k_1) - \delta_\varepsilon(m) = p_1;$$

la comparaison des résultats donne

$$\delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m) \leqq \delta_\varepsilon(m-k_1) - d_\varepsilon(m-k_1).$$

Comme la différence $\delta_\varepsilon(m) - d_\varepsilon(m)$ est positive ou nulle, pour m assez grand elle est constante lorsque $m = \text{const.} \pmod{q}$; le théorème 10 découle ainsi du théorème 9.

Remarque. — Lorsque le domaine D est un bicercle, on peut, par de tout autres méthodes [8], montrer que, pour m assez grand, $\delta_\varepsilon(m) = d_\varepsilon(m)$, autrement dit toute classe ε-fuchsienne de dimension m est fuchsienne; j'ignore s'il en est encore ainsi lorsque D n'est pas un bicercle.

Théorème 11 ([7]). — *Pour $m \geqq M$, toute fonction fuchsienne de dimension $m+k_1$ s'écrit $\alpha\theta + \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2$, où $\theta(z)$, $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$ sont des fonctions fuchsiennes de dimensions $m+k_1-k$, m, m.*

Si $m_1 \geqq M_1$ et $n \geqq 0$, n applications du lemme montrent que la forme générale des classes ε-fuchsiennes de dimension $m_1 + nk_1$ est $\sum_{i=1}^{\delta_\varepsilon(m_1)} P_i[(\beta_1), (\beta_2)](\varphi_i)$, les (φ_i) formant une base des classes ε-fuchsiennes de dimension m_1, les P_i étant des polynomes homogènes et de degré n à deux variables; les systèmes de polynomes P_i, de même degré, tels que la classe $\sum_i P_i[(\beta_1), (\beta_2)](\varphi_i)$ soit fuchsienne forment un module de formes algébriques, qui admet [9] une base finie formée des systèmes P_i^j $(1 \leqq j \leqq s)$. Alors la classe $\sum_i P_i^j[(\beta_1), (\beta_2)](\varphi_i)$ contient une fonction fuchsienne ω_j et toute classe fuchsienne de dimension $m_1 + nk_1$ est de la forme $\sum_j Q_j[(\beta_1), (\beta_2)](\omega_j)$, les Q_j étant des polynomes homogènes, autrement dit toute fonction fuchsienne Θ de dimension $m_1 + nk_1$ est équivalente à une fonction fuchsienne de la forme $\sum_j Q_j(\beta_1, \beta_2)\omega_j$; la différence $\Theta - \sum_j Q_j(\beta_1, \beta_2)\omega_j$ est divisible par α (n° 14, a) et le quotient est

([7]) Ce théorème sera généralisé au n° 21 (cor. 11).

encore une fonction fuchsienne; $\Theta(z)$ possède la propriété annoncée pourvu que sa dimension dépasse celles de toutes les ω_j.

18. Ces deux théorèmes entraînent à leur tour les propriétés annoncées dans l'introduction :

Corollaire 9. — *Toute fonction fuchsienne de dimension assez grande est somme d'une série de Poincaré* (*cf.* n° 3).

D'après le théorème 11, il suffit de montrer qu'il en est ainsi d'une fonction fuchsienne de la forme $\alpha\theta+\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2$, où θ, θ_1, θ_2 sont des fonctions fuchsiennes quelconques, tandis que α, β_1, β_2 sont des fonctions fuchsiennes fournies par les théorèmes 1 à 6, qui utilisent les trois procédés de construction suivants : formation d'une série de Poincaré de dimension au moins égale à 2 à partir d'un polynome $u(z)$, multiplication, combinaison linéaire.

Soient donc un polynome $u(z)$,

$$\omega(z)=\sum_{f\in\gamma}u[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^m,$$

et $\theta(z)$ une fonction fuchsienne quelconque de dimension p; $\omega(z)\theta(z)$ est la somme de la série, normalement convergente sur tout compact, de terme général

$$u[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^m\theta(z)\equiv u[f(z)]\theta[f(z)][\mathrm{D}f(z)]^{m+p},$$

donc de la série de Poincaré de dimension $m+p$ construite à partir de la fonction $u\theta$.

Corollaire 10. — *Pour* $m\geqq\mathrm{M}$, *on a*

$$d(m)=am^2+b(r)m+c(r),$$

r étant le reste de la division de m par q, a ne dépendant que du groupe γ.

Les fonctions fuchsiennes de dimension m identiquement nulles sur ε forment (*cf.* n° 14, *a*) un espace vectoriel de dimension $d(m-k)$, donc

$$d_\varepsilon(m)=d(m)-d(m-k);$$

pour $m\geqq\mathrm{M}$, le théorème 10 donne

$$d_\varepsilon(m)=\lambda m+\rho(r),$$

d'où

$$d(m)-\frac{\lambda}{2k}m^2-\left[\frac{\lambda}{2}+\frac{\rho(r)}{k}\right]m=\text{const.}\quad\text{pour}\quad m\equiv l\quad(\text{mod}\,k);$$

la démonstration s'achève comme celle du théorème 9.

Remarque. — Inversement, le nombre a, attaché au groupe γ, détermine le coefficient $\lambda = 2ak$ du théorème 9, puis le nombre $p_1 = \lambda k_1 = 2akk_1$ défini au n° 14.

V. — Idéaux de fonctions fuchsiennes.

19. Nous adoptons ici une définition analogue à celle des idéaux de formes algébriques : un *idéal* de fonctions fuchsiennes contient, d'une part, avec deux fonctions fuchsiennes de même dimension, leur somme; d'autre part, avec une fonction fuchsienne, son produit par n'importe quelle fonction fuchsienne, en particulier par une constante.

THÉORÈME 12. — *Tout idéal de fonctions fuchsiennes a une base finie.*

Parmi les fonctions dont se compose un idéal $\mathcal{J}$, celles qui ont une dimension donnée sont combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles; il suffit donc de montrer que, pour k fixe et $m_1 \geqq M$, les fonctions de $\mathcal{J}$ dont la dimension est de la forme $m_1 + nk$ (n entier $\geqq 0$) sont des combinaisons (où les multiplicateurs sont des fonctions fuchsiennes) d'un nombre fini d'entre elles.

Pour cela, reprenons les résultats du chapitre IV avec $k_1 = k$: n applications du théorème 11 montrent que la forme générale des fonctions fuchsiennes de dimension $m_1 + nk$ est $\sum_{i=1}^{d(m_1)} P_i(\alpha, \beta_1, \beta_2)\theta_i$, les θ_i formant une base des fonctions fuchsiennes de dimension m_1, les P_i étant des polynomes homogènes et de degré n à trois variables; les systèmes de polynomes P_i, de même degré, tels que la fonction fuchsienne $\sum_i P_i(\alpha, \beta_1, \beta_2)\theta_i$ appartienne à $\mathcal{J}$ forment un module de formes algébriques, qui admet [9] une base finie formée des systèmes $P^j (1 \leqq j \leqq s)$; de la relation

$$P_i \equiv \sum_{j=1}^{s} P_i^j Q_j,$$

où les Q_j sont s polynomes homogènes dont les degrés présentent entre eux des différences convenables, résulte

$$\sum_{i=1}^{d(m_1)} P_i(\alpha, \beta_1, \beta_2)\,\theta_i \equiv \sum_{j=1}^{s} Q_j(\alpha, \beta_1, \beta_2)\,\omega_j,$$

où

$$\omega_j \equiv \sum_{i=1}^{d(m_1)} \mathrm{P}_i^j(\alpha, \beta_1, \beta_2)\,\theta_i$$

appartient à $\mathcal{J}$.

20. Comme pour les idéaux de formes algébriques [9] et [11], nous appellerons *fonction caractéristique* de $\mathcal{J}$ le nombre $\chi(m)$ des conditions linéaires imposées à une fonction fuchsienne de dimension m par son appartenance à $\mathcal{J}$, ou encore la dimension de l'espace vectoriel quotient par $\mathcal{J}$ de celui des fonctions fuchsiennes de dimension m; par exemple les fonctions fuchsiennes identiquement nulles sur une variété E, conservée par les automorphismes de γ, forment l'idéal de E, dont la fonction caractéristique est le nombre $d_{\mathrm{E}}(m)$ défini au nº 9.

Théorème 13. — *La fonction caractéristique d'un idéal est, pour m assez grand, de la forme $\chi(m) = \lambda(r)m + \rho(r)$, r étant le reste de la division de m par q (sauf si l'idéal est réduit à o).*

$d(m_1 + nk) - \chi(m_1 + nk)$ est la dimension du sous-espace des fonctions fuchsiennes de dimension $m_1 + nk$ appartenant à $\mathcal{J}$; la démonstration du théorème 12 fait correspondre une telle fonction à chaque système de polynomes Q_j de degrés $n - p_j$ (p_j étant le degré des polynomes P_i^j); les systèmes de Q_j formant un espace vectoriel de dimension $\sum_{j=1}^{s} \mathrm{C}_{n-p_j+2}^2$, reste à évaluer la dimension du sous-espace des systèmes auxquels correspond une fonction identiquement nulle : ceux-ci à leur tour forment un module,

$$\mathrm{Q}_j \equiv \sum_{k=1}^{l} \mathrm{Q}_j^k \mathrm{R}_k,$$

et ainsi de suite, mais on sait [9] que la suite des systèmes dérivés du système d'équations linéaires (en R_k) $\mathrm{Q}_j \equiv 0$ est limitée.

On trouve ainsi pour $\chi(m_1 + nk)$ un trinome en n, donc, comme expression de $\chi(m)$, un trinome en m valable pour m assez grand et $m \equiv l (\mathrm{mod}\, k)$, puis, par le raisonnement déjà employé aux nºs 16 et 18, pour $m \equiv r (\mathrm{mod}\, q)$:

$$\chi(m) = \varkappa(r)\, m^2 + \lambda(r)\, m + \rho(r).$$

Si l'idéal contient une fonction fuchsienne non identiquement nulle de dimension m_0, il contient aussi les produits de celle-ci par toutes les fonctions fuchsiennes de dimension m :

$$d(m + m_0) - \chi(m + m_0) \geqq d(m),$$

d'où, avec l'aide du corollaire 10, $\varkappa(r) = 0$ quel que soit r.

Exemples. — 1° Si $\mathcal{J}$ est l'idéal d'une variété E conservée par les automorphismes de γ et réduite à des points isolés, on a vu au n° 10 que

$$\chi(m) = d_{\mathrm{E}}(m) = \rho(r).$$

2° Si E n'est pas réduite à des points isolés, on a vu au n° 10 que $\lambda(r) > 0$ au moins pour $r = 0$; si, de plus, une composante irréductible non ponctuelle de E n'a en commun avec Q que des points isolés, $\lambda(r) > 0$ quel que soit r.

3° Si E n'a pas de point isolé et si $\mathrm{E} \cap \mathrm{Q}$ n'a que des points isolés, λ ne dépend pas de r (*cf.* th. 9); ainsi l'expression de $d_\varepsilon(m)$ résultant du théorème 10 est aussi celle de $d_{\mathrm{E}}(m)$ pour toute variété E conservée par les automorphismes de γ, sans points isolés, mais telle que $\mathrm{E} \cap \mathrm{Q}$ soit réduite à des points isolés :

$$d_{\mathrm{E}}(m) = \lambda m + \rho(r),$$

λ et $\rho(r)$ dépendant de E.

21. Théorème 14. — *Pour un idéal $\mathcal{J}$ de fonctions fuchsiennes, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. les fonctions de $\mathcal{J}$ n'ont aucun zéro commun;
b. $\mathcal{J}$ contient trois fonctions sans zéro commun;
c. $\chi(m) = 0$ pour m assez grand.

La propriété *c* signifie que $\mathcal{J}$ contient toutes les fonctions fuchsiennes de dimension assez grande; *a* et *b* résultent alors des théorèmes 3 et 5.

Partons de *a* : à tout point z_1 de D on peut associer une fonction fuchsienne $\theta \in \mathcal{J}$ telle que $\theta(z_1) \neq 0$; sa dimension est multiple de $q(z_1)$; en la multipliant par les fonctions fuchsiennes $\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}$ utilisées pour le corollaire 2 (n° 6), on constate que celui-ci subsiste si l'on considère seulement les fonctions fuchsiennes de $\mathcal{J}$; de même le corollaire 1, donc aussi les théorèmes 3, 5 et 6 (avec un nombre μ dépendant de $\mathcal{J}$) et leurs conséquences : ainsi les fonctions $\alpha(z)$, $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$ du n° 14 peuvent être prises dans $\mathcal{J}$; alors (th. 11) toute fonction fuchsienne de dimension assez grande appartient à $\mathcal{J}$.

Corollaire 11. — *Le théorème 11 reste vrai pour trois fonctions fuchsiennes α, β_1, β_2 quelconques, pourvu qu'elles n'aient aucun zéro commun.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] O. Blumenthal, *Math. Ann.*, t. **58**, 1904, p. 497.

[2] H. Cartan, *Math. Zeits.*, t. **35**, 1932, p. 760.

[3] H. Cartan, *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.*, t. **61**, 1944, p. 149 (app. **2**).

[4] H. Cartan, *Bull. Soc. math. France*, t. **78**, 1950, p. 29 (§ 8).

[5] G. Giraud, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Paris, 1920 (nos **9** à **16**).

[6] M. Hervé, *C. R. Acad. Sc.*, t. **226**, 1948, p. 462.

[7] M. Hervé, *C. R. Acad. Sc.*, t., **232**, 1951, p. 673.

[8] M. Hervé, *C. R. Acad. Sc.*, t. **234**, 1952, p. 41.

[9] D. Hilbert, *Math. Ann.*, t. **36**, 1890, p. 473.

[10] L. K. Hua, *Ann. of math.*, t. **47**, 1946, p. 167.

[11] E. Lasker, *Math. Ann.*, t. **60**, 1905, p. 20.

[12] H. Poincaré, *Acta Math.*, t. **1**, 1882, p. 193 ou *Œuvres*, t. **2**, p. 169 (§ **6**).

[13] C. L. Siegel, *Analytic functions of several complex variables*, Princeton, 1950 (chap. **10** et **11**).