RENÉ THOM

Problèmes rencontrés dans mon parcours mathématique : un bilan

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 70 (1989), p. 199-214
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1989__70__199_0>

PROBLÈMES RENCONTRÉS DANS MON PARCOURS MATHÉMATIQUE : UN BILAN

par René THOM [1]

I. Introduction : un peu d'histoire

Il est sans doute difficile d'apprécier de manière « objective » le développement comparé de la Mathématique au cours de diverses périodes de temps. Mais j'oserai prétendre que la Mathématique a connu, dans la quinzaine d'années 1935-1950, un prodigieux développement — dont il serait difficile de trouver l'équivalent dans les années de ce siècle qui suivirent. Ceci est assurément vrai si l'on se place du point de vue du topologue — mais cela le demeure en toute généralité — car l'essentiel des notions acquises à cette époque a pénétré sous une forme ou sous une autre pratiquement dans toutes les autres branches de la Mathématique (et même, depuis une dizaine d'années, en Physique).

Ce progrès s'est manifesté sous deux formes : par l'extension considérable des entités mathématiques étudiées d'une part et l'approfondissement ou la définition de nouvelles techniques d'opérations algébriques sur ces entités d'autre part. Enonçons ici quelques dates repères.

1928 Première définition d'une variété différentiable par cartes et atlas (« Projective Geometry » de Veblen-Whitehead). (Il s'agissait là d'une systématisation d'intuitions géométriques fort anciennes, nées de la géométrie algébrique, des définitions de H. Poincaré et d'Elie Cartan, de la « Riemannsche Fläche » d'H. Weyl, etc.).

1933-1938 Articles fondamentaux de H. Whitney sur les variétés différentiables (*Ann. of Math.*, 1935-1938).

1935-1940 Apparition de la cohomologie, permettant de définir une structure multiplicative sur tout espace, généralisant l'intersection des variétés (cap et cup-product, Lefschetz). Apparition de l'homotopie (Hopf) et premières relations avec l'homologie (Hurewicz). Théories intrinsèques d'homologie, par exemple homologie singulière.

---

[1] Texte remanié de l'allocution prononcée par l'auteur au Colloque tenu en son honneur à Paris, en septembre 1988.

1941-1945 Définition des espaces fibrés. Groupe de structure. Fibré universel et espace classifiant. Classes caractéristiques. Fibrés tangent et cotangent. Homologie d'une application. Théorie des faisceaux. Suites spectrales (H. Cartan, Leray, Steenrod, Chern). Naissance de l'algèbre homologique : catégories et foncteurs (Eilenberg, McLane).

1945-1948 Complexes d'Eilenberg-MacLane. Opérations en cohomologie (puissances de Steenrod). Tour de Postnikov.

1950-1952 Théorie des jets (C. Ehresmann).

Cette extraordinaire effervescence de la mathématique s'est produite pour l'essentiel en ces années 1940-1945, une période qui, *a priori*, n'apparaissait guère favorable au développement de la pensée pure. C'est de cette situation très favorable que, venu à la recherche en 1946-1950, j'ai pu bénéficier.

II. Mon histoire personnelle

Entré à l'E.N.S. en 1943 (époque de l'occupation allemande), j'ai connu sur les bancs de l'école l'excitation issue des idées bourbakistes. A ma sortie de l'école, j'ai suivi Henri Cartan à Strasbourg, ville où je suis resté après le retour de Cartan à Paris. Le séminaire de C. Ehresmann était alors un des lieux privilégiés où l'on pouvait s'initier à toutes ces idées et ces techniques nouvelles. Deux mathématiciens qui résidaient alors à Strasbourg ont fortement contribué à me guider dans ce nouvel univers de la topologie : Koszul d'une part, qui à l'époque m'indiqua l'article princeps sur les carrés de Steenrod, et par ailleurs Wu Wen Tsun qui attira mon attention sur la théorie des classes caractéristiques; c'est à cette époque (1959-1960) que j'ai fait mes premiers travaux : l'un sur la théorie de Morse (la décomposition en cellules par les trajectoires des gradients dans une variété), l'autre sur la relation $Sq^i \varphi^* 1 = \varphi^* W_i$ reliant carrés de Steenrod et classes de Stiefel-Whitney. De plus, Wu Wen Tsun m'a signalé le théorème de Pontrjagin énonçant que si la variété V^n est un bord : $V^n = \partial M^{n+1}$, alors tous les nombres caractéristiques de V^n sont nuls. Dans ma thèse, soutenue à Paris en octobre 1951, j'indiquais la relation de ce théorème avec le théorème de l'index.

Je passai alors un an au Graduate College de Princeton : j'y appris quelque peu l'anglais, suivis les cours de Steenrod et les séminaires de Kodaira-Spencer à l'Université. C'est durant cette période (printemps 1952) que j'ai eu avec Chevalley, qui m'avait invité à faire un exposé à Columbia University, une conversation marquante qu'il me tint dans son appartement de Riverside Drive. Il m'exposa la possibilité d'introduire dans le monde des structures différentiables la notion de généricité connue — depuis les Italiens — en Géométrie algébrique.

Revenu en France, en 1952, je débutai dans l'enseignement comme maître de conférence à l'Université de Grenoble, puis à Strasbourg où je revins en 1953. Mais cette question de la généricité différentiable a continué à me préoccuper, elle devait jouer un rôle essentiel dans mes recherches futures sur le cobordisme. Mon premier outil fut la « transversalité », premier pas du programme que m'avait indiqué Chevalley. C'est de Rham qui à l'époque (1953-1954) me signala le théorème de Sard, qui reste l'instrument essentiel de la topologie différentielle; vint ensuite la transversalité dans les espaces de jets, qui deviendra un outil majeur dans la théorie des singularités différentiables (Colloque de Mexico de 1956).

On sait comment ces résultats — convergeant dans la détermination partielle des algèbres de cobordisme $\mathcal{N}$ et Ω — me valurent l'attribution en 1958 de la médaille Fields. Cette date (1958) marque peut-être la fin de ce qu'on pourrait considérer comme mon œuvre « classique » de mathématicien; mes travaux ultérieurs présentent un caractère moins « achevé », plus « erratique », mais ils ne sont pas sans ouvrir des perspectives. (Qu'il me soit permis ici d'évoquer les maîtres qui m'ont guidé dans toute cette période antérieure : Henri Cartan et le regretté Charles Ehresmann, qui furent mes « pères » en matière de topologie.) Quoi qu'il en soit j'ai commencé à abandonner de plus en plus la topologie algébrique proprement dite — devenue avec la K-théorie d'une algébricité qui me dépassait — pour me consacrer à un matériel plus « mou », celui des applications différentiables [2]. Dans mon cours de « Gastprofessor » à l'Université de Bonn (1957), rédigé par H. Levine, on trouve la définition d'une singularité comme « strate d'orbites équisingulières » pour l'action dans $J^r(n, p)$ du groupe $L^r(n) \times L^r(p)$ des automorphismes locaux de la source et du but (conception issue de la théorie des jets d'Ehresmann). Ceci permettait de visualiser les applications présentant un certain type de singularités (non génériques) comme des sous-variétés dans l'espace fonctionnel global de ces applications. De plus, le problème s'est posé très tôt de définir la transversalité d'une application $f: V \to M^n$ non plus seulement sur une sous-variété de R^n, mais sur un ensemble comportant des singularités explicitement définies (un ensemble algébrique, par exemple). Ceci exigeait une analyse très fine de la topologie de ces singularités. Alors a commencé la longue histoire de l'édification de la notion d'ensemble et de morphismes stratifiés. En partant des premiers théorèmes de triangulation des ensembles algébriques ou analytiques (Cairns), il fallait s'efforcer de donner une caractérisation « tangentielle » de ces singularités. A cet égard, il me faut citer, avec le nom de Marie-Hélène Schwartz, celui de S. Łojasiewicz qui, en partant du problème de la division d'une distribution, fut conduit à la notion de « partition » d'un ensemble analytique. Mais seul H. Whitney, qui participait des deux types d'analyse, différentielle et fonctionnelle, fut à même d'énoncer avec ses propriétés (a, b) les conditions « utiles » pour une « bonne » théorie de la transversalité et de l'équi-singularité.

Mais revenons aux années 1960. A cette époque, encore à l'Université de Strasbourg, je me suis livré (avec l'aide d'un collègue physicien, P. Pluvinage, aujourd'hui disparu) à des expériences d'optique géométrique (avec miroirs sphériques, dioptres et lentilles) afin de vérifier physiquement la stabilité topologique des singularités d'appli-

(2) Vers les années 1962 il m'arriva de rencontrer Lefschetz aux Etats-Unis. Il me fit alors cette confidence : « Que la Topologie était belle avant 1935! Après, elle est devenue beaucoup trop algébrique. »

cations. Je découvris alors — à mon grand étonnement — que les caustiques présentaient des « singularités stables » (les « ombilics ») non prévues par la théorie. Je ne devais comprendre la raison du phénomène (l'extrémalité due au principe de Fermat) que quelques années plus tard. C'est peu après (en 1963) que je quittai Strasbourg pour accepter l'offre d'entrer à l'I.H.E.S., offre que m'adressa son président fondateur, Léon Motchane. J'y pris alors la succession de Dieudonné, avec pour unique collègue mathématicien A. Grothendieck. De tous les avantages que m'a procurés cette admirable institution, j'ai surtout apprécié la liberté de recherche dont j'y ai joui, et dont j'ai sans doute quelque peu abusé. Vers cette époque — un peu pour des raisons polémiques (une défense de la théorie des enveloppes) — je m'intéressai de plus près à la structure des applications différentiables; je m'aperçus alors de l'importance du phénomène d'éclatement *(blowing up)* comme source d'instabilité topologique d'un morphisme (article 1962, « Education mathématique »); par exclusion, les morphismes sans éclatement devaient présenter la stabilité topologique (deuxième lemme d'isotopie). En fait, la théorie des ensembles stratifiés avec ses deux lemmes d'isotopie ne prit une forme définitive qu'avec les travaux de J. Mather (1966-1967) aboutissant à la densité des applications structurellement stables (lisses et propres) : $V^{(n)} \to M^{(p)}$ entre variétés différentiables.

La notion de déploiement d'une singularité que j'introduisis de manière plutôt empirique (une section transversale de la strate des morphismes ayant une singularité non générique de codimension finie) ne devait s'éclaircir que beaucoup plus tard, lorsque fut fait le lien avec la théorie de la déformation « plate » des ensembles analytiques. J'appris seulement vers 1972 que mon collègue d'alors à l'I.H.E.S., A. Grothendieck, avait dès 1962 édifié une telle théorie des déformations (formellement définies) : un détail qui en dit long sur le caractère des relations que nous entretenions.

Après 1970, l'essentiel de mon intérêt est passé des mathématiques à cette méthodologie connue sous le nom de théorie des catastrophes. Bien que le sujet échappe *stricto sensu* à la mathématique, j'en dirai quelques mots.

En 1960, l'article de C. Zeeman, « Topology of the Brain », m'avait singulièrement fasciné : il manifestait les énormes possibilités de « modélisation » des phénomènes physiques ou physiologiques par des modèles de dynamique classique (dans ce cas précis, la modélisation était sans doute abusivement simple). Vers 1960 également, j'entrai en contact aux Etats-Unis avec le groupe Peixoto-Lefschetz qui travaillait sur la stabilité structurelle des systèmes dynamiques. Ce fut également l'époque où S. Smale a provoqué avec son théorème « spectral » un renouveau spectaculaire de la Dynamique. Comme je connaissais assez bien la structure des champs de gradients, il m'était clair dès le départ que ces champs devaient fournir de bons cas de stabilité structurelle. De là l'intérêt pour les dynamiques de gradients, puis pour les champs constitués de telles dynamiques. Ainsi sur une variété fibrée de base B, de fibre F, un tel champ de dynamiques définit une partition de B dont chaque strate est associée à l'attracteur (supposé générique et ponctuel) de la dynamique fibre. Ceci me fit voir ainsi pourquoi les caustiques ont des singularités plus complexes; vers 1966, déjà, Arnol'd m'avait signalé l'intérêt de la chose pour les dynamiques hamiltoniennes (classifications des projections de variétés lagrangiennes). C'est en 1967 que j'ai publié la liste des sept catastrophes « élémentaires ». Singularités de codimension $\leqslant 4$ des fonctions réelles, elles furent l'amorce d'une recherche qui devait être poussée au-delà de toute espérance par Arnol'd et son école.

Sur la dynamique générale (en catastrophes non élémentaires, ou généralisées) je n'ai jamais été au-delà du schéma de la bifurcation (due à Myrberg) de $z \to z^2 + c$ et ma seule contribution a (peut-être) été d'avoir forgé l'appellation d'*attracteur*, un vocable appelé à un grand avenir, même si la notion reste passablement obscure dans le cas général. Je n'évoquerai ici que par souci d'être complet mon livre *Stabilité structurelle et morphogenèse*, écrit dans les années 1966-1967, publié seulement en 1972. On y exploitait systématiquement les possibilités de modélisation de phénomènes par des champs de dynamiques locales de type gradient et ceci dans les domaines les plus divers des sciences : physique, biologie, linguistique. Mais c'est seulement par l'extension (considérable) à la théorie générale des systèmes apportée par E. C. Zeeman en 1972-1973 que la théorie des catastrophes a connu ses grands succès médiatiques (1974-1975), puis après 1975-1976 ses critiques parfois malveillantes, mais souvent justifiées. Le caractère d'inefficacité prédictive des modèles de la T.C. fut alors relevé et comme on pense d'ordinaire en science que les modèles sont justifiés par leur efficacité prédictive, on en a tiré un peu vite la conclusion que ces modèles étaient sans intérêt. Ce n'est que depuis 1984-1985 qu'on assiste à une timide réapparition de ces modèles dans la littérature appliquée. Je crois — personnellement — que même inefficace, la T.C. est un prodigieux instrument d'intelligibilité dans les phénomènes, et — j'en suis convaincu de ce point de vue —, qu'en tant que technique d'interprétation, elle a encore un fort bel avenir devant elle. Ceci termine la partie historique de ma contribution.

Venons-en maintenant aux problèmes rencontrés dans mon parcours mathématique.

On va d'abord énoncer en section III un ensemble de questions mathématiquement bien définies : une liste de problèmes. Puis, en section IV, on offrira un ensemble de questions à caractère programmatique, de nature à la fois plus floue et plus générale.

III. Liste de problèmes

A) *Problème de la décomposition des fonctions*

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ un germe de fonction analytique (resp. formelle) à l'origine O sur $\mathbf{C}^n(x)$ ou éventuellement $\mathbf{R}^n(x)$. On dira que le germe F est décomposable si, par un changement de variables local en O : $(x_i) \to (y_j)$, F peut s'écrire sous la forme d'une somme : $F = G(y_1, y_2, \ldots, y_s) + H(y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_n)$, G et H étant des germes de fonctions (analytiques ou formelles, sur $\mathbf{C}^s$ resp. $\mathbf{C}^{n-s}$, ou $\mathbf{R}^s$ resp. $\mathbf{R}^{n-s}$, de mêmes dimensions). En itérant sur chacun des termes G, H le même processus de décomposition, et en continuant sur chacun des termes obtenus tant que faire se peut, on finira par aboutir à une sommes $g_1 + g_2 + \ldots + g_k$ de séries, dont chacune n'admet aucune décomposition. On dira alors qu'une telle somme est *irréductible.*

Enonçons dès lors la « Conjecture » :

(D) Deux décompositions irréductibles de la série F sont isomorphes (*via* un changement de variables local).

Commentaire. — La conjecture (D) généralise la situation bien connue des formes quadratiques. Elle a été établie pour les fonctions quasi homogènes par J.-P. Françoise, *C.R.A.S.*, t. 290 (16 juin 1980), série A, p. 1061-1064. Depuis octobre 1988, j'ai reçu une lettre intéressante de Wilson Mauricio Tadini (Université U.N.E.S.P., São José do Rio Preto, Brésil) donnant par des critères algébriques une généralisation du théorème de la singularité résiduelle pour un germe ayant une décomposition d'un certain type; ces critères sont alors reliés aux symboles de Boardman de la singularité. Il y a évidemment une connexion entre (D) et le théorème dit de Sebastiani-Thom : si (D) est vraie, il s'ensuit des contraintes très sévères sur les monodromies des singularités complexes correspondantes... La théorie des catastrophes offre à ce problème une certaine motivation « philosophique ». Si l'on admet qu'un système physique voit son individuation créée par un cratère de potentiel $V(x_i)$ au voisinage de l'origine O, alors ce problème revient à reconnaître si un système physique donné n'est pas en fait le produit direct de deux systèmes indépendants non couplés. C'est donc le caractère distinguable (ou non distinguable) des entités qui est en jeu ici, ainsi que le caractère canonique des produits de systèmes indépendants.

B) *Problème sur les gradients de fonctions analytiques*

Soit $F(x_i)$ une fonction analytique réelle dans un voisinage de l'origine O de R^n. Soit X son champ de gradient, défini par $X_i = \partial F / \partial x_i$. Alors on a la conjecture suivante : *Toute trajectoire de* (X) *aboutissant à l'origine* O *y a une tangente.*

Un théorème de S. Łojasiewicz affirme que toute trajectoire de gradient d'une fonction analytique $G(y_j)$ issue d'un point y voisin de l'ensemble $H = G^{-1}(O)$, si elle atteint H pour G tendant vers zéro, n'y possède qu'un point limite (fonction continue du point initial y). Appliqué au cas des fonctions F homogènes, on en déduit facilement que — en ce cas — la conjecture est vraie. Divers auteurs ont travaillé sur cette conjecture. Selon V. I. Arnold (avec qui j'ai eu sur ce sujet une conversation récente), cette question semble présenter de l'intérêt pour la solution d'un problème classique de Jacobi : démontrer que *si* V *est une fonction potentielle analytique à l'origine, alors si V n'admet pas en* O *un minimum strict, tout équilibre en* O *est instable,* conjecture qui, à ses dires, aurait été démontrée récemment à Moscou pour la dimension trois. Je crois que ma conjecture ne recevra de solution définitive que *via* une désingularisation. L'éclatement de l'origine sur la variété $V^{-1}(O)$ (réel) fournit un ensemble stratifié A contenu dans le diviseur exceptionnel localement défini par $u = 0$. Au voisinage de chacune de ses strates X_i, le champ de gradient tangentiel se présente sous la forme $u^k . a(x; u)\ Y_i(x; u)$, où $a(x, u)$ est une fonction inversible, et $Y_i(x; O)$ un vecteur non nul. Ces champs Y_i définissent dans toute strate X_i une « dynamique-résidu » et comme les frontières entre strates sont définies par des coins réguliers *(normal crossings)*, on pourrait définir les transitions entre les dynamiques (Y_j) à travers une frontière (sur le modèle des transitions étudiées dans les réels pour le problème de Dulac par Ilyaschenko, ou les systèmes de Clemens dans l'algébrique complexe). S'il existait une trajectoire de gradient dépourvue de tangente en O, son relèvement après éclatement devrait définir une trajectoire g dont l'ensemble limite L dans A est invariant par la dynamique-résidu (D) globalement définie sur A. Acceptons alors qu'il existe pour cette dynamique-résidu un lemme de ermeture *(closing lemma)* tel que celui de Pugh en dynamique classique. On pourra par une perturbation arbitrairement petite créer une dynamique-résidu voisine (D′) $\mathbf{C}^1$-voisine de (D) contenant une trajectoire fermée C. Par ailleurs la forme dV, relevée au voisinage de A, admet elle aussi des résidus sur les strates X_i et l'intégrale de cette forme résidu sur C sera nécessairement positive (en tant que résidu). Mais C est l'image homéomorphe sur toute variété de niveau $V = \varepsilon$ d'une courbe C_ε, qui dans la rétraction standard d'un voisinage de A sur A (variété à coins) va donner C pour $\varepsilon = 0$. Sur C_ε, l'intégrale de dV est nulle; mais le résidu sur C devrait être strictement positif, d'où contradiction. Telle est la source de ma conviction en ce qui concerne cette conjecture...

C) *Problèmes sur les cut-loci*

Si V est une sous-variété (lisse) d'une variété riemannienne M, le cut-locus K de V dans M est l'ensemble fermé défini par la propriété suivante : tout point m de l'ouvert complémentaire M-V admet deux géodésiques normales à V, simples, minimisant absolument la distance $d(m, V)$. Il résulte de cette définition que la variété V est un rétracte par déformation de l'ouvert M-K. Dans les situations génériques (du point de vue $\mathscr{C}^\infty$), K est un ensemble stratifié lissement plongé, c'est donc un rétracte par déformation d'un de ses voisinages; K est par suite aussi un rétracte par déformation de l'ensemble réunion des géodésiques minimalisantes aboutissant sur K (et ceci bien que le champ des géodésiques minimalisantes soit en général discontinu sur les strates — singulières — de K de dimension inférieure à la dimension de K : situation dite des *ensembles de Maxwell* dans ma terminologie).

Alan Weinstein a offert une très élégante démonstration du théorème des quatre sommets pour une courbe plane fermée; il observe que le cut-locus K de la courbe, qui est un rétracte par déformation du disque ouvert intérieur de la courbe, est génériquement un polyèdre contractile de dimension un, donc *un arbre*. Par suite, K a au moins deux extrémités libres, lesquelles correspondent à des maxima de la courbure; la courbe présente donc en plus deux minima de courbure, d'où le théorème des quatre sommets. Ceci montre l'intérêt qu'il y aurait à déterminer les singularités génériques des cut-loci en dimension supérieure. En dimension trois, le cut-locus de la sphère bord d'une boule B^3 est un polyèdre de dimension deux contractile. Si on savait que pour toute variété à bord contractile G le cut-locus de son bord — un polyèdre de dimension deux contractile — admet toujours une arête libre, on pourrait sans doute démontrer la conjecture de Poincaré. Malheureusement, il y a des exemples de boules B^3 standard dont le cut-locus interne n'a aucune arête libre, par exemple le voisinage tubulaire normal du célèbre « bonnet de fou » *(Dunce-Hat)*. (Il s'agit du polyèdre défini à partir du triangle ABC par les identifications AB = AC = CA.) En ce cas, bien sûr, il y a un point singulier « instable » au sens de Heinz Hopf. Il serait intéressant de savoir si toute présentation finie (par générateurs et relations) du groupe trivial dont la réalisation cellulaire de dimension deux peut être plongée dans $\mathbf{R}^3$ admet toujours l'origine comme point « instable ».

Le problème du cut-locus associé à une sphère plongée a fait l'objet d'une littérature assez considérable. Dans le cas de la dimension deux (S^2 dans $\mathbf{R}^3$), on a en général supposé la sphère convexe. Les résultats connus, en ce dernier cas, sont dus à E. Heil et Zamfirescu. On a conjecturé que pour un plongement lisse convexe de S^n dans $\mathbf{R}^{n+1}$ le nombre des normales issues d'un point (convenablement choisi) de $\mathbf{R}^{n+1}$ est toujours supérieur à $2(n+1)$ et Zamfirescu l'établit pour « presque tout » plongement lisse convexe de S^n. On a fait la même conjecture pour toute immersion de la sphère S^n dans $\mathbf{R}^{n+1}$ (vrai pour $n = 2$ d'après Deo-Klamkin; esquisse de démonstration pour $n = 3$ par Hentschke). Je me propose ici d'établir un théorème valable pour toute hypersurface compacte H^n plongée dans $\mathbf{R}^{n+1}$ ayant l'homologie de la sphère S^n.

A côté du cut-locus standard, qui repose sur l'emploi de géodésiques (de normales) minimales, on peut considérer *un cut-locus d'indice i* K^i, défini par la condition que pour tout point p du complémentaire $\mathbf{R}^{n+1} - K^i$ la fonction distance $d(m; p)$, où m parcourt H, a tous ses points critiques d'indice *i simples et de valeurs distinctes.* (Noter que pour l'indice zéro, cas des géodésiques minimales, il y a lieu de prendre le carré d^2 au lieu de d.)

Le théorème suivant semble indiquer que ces cut-loci mixtes pourraient avoir une certaine importance.

Théorème. — Pour presque toute sphère d'homologie H^n *compacte connexe lissement plongée dans* $\mathbf{R}^{n+1}$, *le cut-locus minimal* K^0 *et le cut-locus maximal* K^n *se rencontrent. (Il s'agit ici du cut-locus minimal (resp. maximal)* strict, *c'est-à-dire n'impliquant que les géodésiques réalisant en tout point m le minimum (resp. le maximum) absolu de la distance* $d(m; H^n)$.*)*

Preuve. — Génériquement le cut-locus K^0 (ainsi que K^n) est un ensemble stratifié lissement plongé (dont les singularités sont du type de Maxwell, selon la terminologie de stabilité structurelle et morphogenèse). L'hypersurface H^n divise l'espace euclidien en deux régions, l'intérieur M^0 et l'extérieur (E). Dans M^0 se trouve une partie du cut-locus minimal strict, qu'on notera J. Le cut-locus maximal et les composantes externes du cut-locus minimal peuvent être non compacts.

Le théorème exprime que l'intersection $J \cap K^n$ est non vide.

Comme les singularités de J sont localement du type « coins » ou « arêtes libres » — en tout cas de type polyédral rectilinéairement plongé —, il existe autour de J une fonction tapissante G (telle que $G^{-1}(0) = J$, dont 0 est valeur critique isolée). Il est bien connu qu'on peut construire à partir de H le système des fronts d'onde définis par $d(p; H) = k$ constante; l'ensemble J est engendré à partir des self-intersections de ces fronts d'onde se propageant vers l'intérieur M^0. Les trajectoires rectilignes, issues de H et normales aux fronts d'onde, permettent de définir une rétraction par déformation de la variété à bord compacte M^0 sur J, qu'on désignera dans la suite par ρ.

En un point q de J, il passe en général un nombre fini de trajectoires normales à H (le cas d'une infinité continue est non générique et de codimension infinie); il y a autant de ces normales que de points critiques de la fonction $d(q; m) : H \to \mathbf{R}$. Si l'on se place en un point q de J, la normale minimale (absolue) de $d(q; H)$ peut n'être pas unique (génériquement il y en a deux symétriques par rapport au plan tangent à J en q, plus que deux si on est en un point singulier de J, par exemple sur une arête triple, il y a trois normales minimales). On lèvera une éventuelle ambiguïté en se plaçant en un point voisin de q sur une variété de niveau de l'hypersurface de niveau de la fonction tapissante $G^{-1}(\varepsilon)$ pour ε petit. Comme le plan tangent à cette hypersurface tend vers le plan tangent à J, toute trajectoire de la rétraction r est transverse à ces hypersurfaces $G^{-1}(\varepsilon)$. Grâce à cet artifice, deux normales aboutissant en $q \in J$ peuvent être dites du même côté de J si elles coupent la même nappe de l'hypersurface tapissante locale $G^{-1}(\varepsilon)$...

Etant donné un point p sur J, on considère l'application g qui à tout point p de J associe sur H le point $g(p)$ qui maximise la distance $d(p; H)$. Si l'intersection $J \cap K^n$ est vide, alors ce maximum est simple et univoquement défini. Ainsi l'application g est continue et lisse presque partout. Pour tout point m de H, on définit une application $S : H \to H$ par la formule

$$S(m) = g(\rho(m)).$$

Or la distance $d(m; g(m))$ ne peut s'annuler parce que m et $g(m)$ sont respectivement le point absolument minimisant resp. maximisant la fonction $d(\rho(m), H)$ sur H (il ne peut y avoir égalité que si H est une vraie sphère, et en ce cas les deux cut-loci min et max sont réduits au point centre). Par ailleurs la fonction $S(m)$ s'étend continûment de H — par la même formule — à tout l'intérieur M^0. Donc l'application S est homologiquement de degré zéro. Dans le produit $H_1 \times H_2$ de deux exemplaires de H, désignons par h_1, resp. h_2, les cycles fondamentaux de H_1, resp. H_2. Le graphe de S dans $H_1 \times H_2$ est un cycle dont l'homologie est de la forme $h_1 \times 1 + 1 \times 0.h_2$; la diagonale D a pour classe d'homologie $(h_1 \times 1 + 1 \times h_2)$ en raison du fait que H est une sphère d'homologie. L'intersection D $\cap$ Graphe de S vaut donc 1. Par conséquent, cette intersection ne peut être vide, et il y a contradiction : J doit nécessairement rencontrer le cut-locus maximal K^n.

Remarque. — Le raisonnement précédent fonctionnerait encore pour une variété à bord M de dimension $n+1$, de bord H, sphère homologique de dimension n et pourvue d'une métrique riemannienne, les cut-loci étant définis par la distance géodésique, sous la seule condition que le diamètre de M soit inférieur au « rayon d'injectivité » de la métrique.

Conjecture. — Pour presque toute application f d'une variété compacte M de dimension n plongée dans R^{n+1}, l'intersection globale des cut-loci $\cap\ (K^0, K^1, K^2, \ldots, K^n)$ est non vide.

Des hypothèses de généricité entraîneront alors qu'on peut, à partir des points de l'intersection (de codimension $n+1$ dans l'espace fonctionnel, donc dans R^{n+1}) mener $2n+2$ normales à l'image de f.

Une conjecture semblable a été énoncée par Hentschke (pour la sphère). On a l'impression que la structure globale constituée par ces cut-loci (ainsi que les cut-loci mixtes $K(i,j)$, de définition évidente), est extrêmement riche : la théorie de Morse entraîne énormément de relations entre ces objets, dont le théorème ci-dessus est certainement le plus simple. Comme le disait l'ami Raoul, « indomitable Morse theory », dans une autre direction, cependant...

IV. Idées programmatiques

1° *Etoiles génériques des subdivisions cellulaires dans les variétés riemanniennes*

N'abandonnons pas encore les cut-loci : nous considérons un ensemble fini « aléatoire » Z de points (z_j) dans une variété riemannienne compacte M de dimension n; soit K le cut-locus de ces points. On peut penser que pour un ensemble très large de configurations de Z, chaque composante connexe de M-K est un domaine étoilé ayant pour centre un point z_i. (Il suffit pour cela que chaque point z puisse être entouré d'une « couronne » de points z assez rapprochés; par exemple, que la distance de tout point z à sa couronne est inférieure au rayon d'injectivité de la métrique.) On peut se représenter chacun de ces domaines comme un état ayant pour capitale le point z_k qui est son centre, les frontières étant formées d'arêtes (de codimension un) médiatrices entre z_k et z_m, où z_m est dans la couronne de z_k. Je conjecture qu'alors les étoiles transverses aux strates de l'ensemble K des frontières (qui sont génériquement *du type de Maxwell* selon la terminologie de « Stabilité structurelle et Morphogenèse ») appartiennent presque toujours, pour toute dimension n, à un catalogue fini. Si, dès lors, on a une projection linéaire $p : \mathbf{R}^{m+s} \to \mathbf{R}^m$ qu'on restreint à la variété M^n plongée dans $\mathbf{R}^{m+s}$, on devra pour définir le type topologique local en un point x de M de l'application p restreinte à M en x, considérer la position du noyau Ker p de p par rapport à l'étoile locale de sommet x et ceci pour tous les types génériques d'étoiles de K dans M. Si l'on est capable de paramétrer les positions possibles du noyau par rapport à l'étoile grâce à des fonctions spéciales appropriées, on peut espérer exprimer les classes et les nombres caractéristiques du fibré induit par la projection. (Par exemple la classe de Pontrjagin p_1 dans une variété M^4 s'exprime par le nombre des points critiques de corang deux dans une application $M^4 \to \mathbf{R}^4$.) Déjà, pour une application de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^1$, en un point triple pour K et de corang un, on a à paramétrer la position de la droite Ker par rapport aux trois droites du point triple, ce qui introduit le birapport. Faut-il interpréter ainsi le dilogarithme qui apparaît dans la théorie des classes de Pontrjagin triangulées de Gelfand-Gabrielov ?

Ceci me rappelle, en passant, une vaste conjecture ouïe autrefois dans la bouche de Gelfand : tout espace de modules paramétrant une famille de variétés algébriques est isomorphe à l'espace des modules d'une famille de plans de différentes dimensions (drapeaux) sous l'action du groupe linéaire. Ceci pour faire rêver les géomètres algébristes...

2º *Concernant les stratifications*

a) *Stratifications canoniques*

Soit E un espace topologique. Disons que deux points x, y de E sont T-*équivalents* s'il existe des voisinages U de x et V de y et un homéomorphisme h de voisinages pointés $h : (\mathrm{U}, x) \to (\mathrm{V}, y)$. Quels sont les espaces qui n'ont qu'un nombre fini de classes de T-équivalence ?

Les classes d'équivalence sont-elles nécessairement des variétés ?

La chose est connue pour les bons espaces que sont les polyèdres, les ensembles algébriques et analytiques et leurs généralisations : semi-algébriques, sous-analytiques. Les seuls contre-exemples de moi connus sont des espaces de nature fractale (l'ensemble de Cantor, les espaces de Moore...).

Une généralisation naturelle de ce type de problème concerne ce qu'on pourrait appeler les espaces « qualitatifs »; ce sont des espaces qui en tout point x présentent une « qualité » $q(x)$ prise dans un ensemble discret, ou dans un espace topologique fibre $\mathrm{F}(x)$ au-dessus de x. Dans le cas des bons espaces stratifiés décrits plus haut, la fibre $\mathrm{F}(x)$ est la même pour tout autre point y appartenant à la même strate que x (la même composante connexe de la classe de T-équivalence). Le plus souvent l'espace $\mathrm{F}(x)$ pour x dans une strate X est déterminé à partir des espaces $\mathrm{F}(y)$ sur les strates Y de l'étoile de X. (Schéma d'incidence des qualités.) C'est là la seule conceptualisation propre de la notion d'organisation biologique chez les êtres vivants (l'organisme étant regardé comme une « boule qualitative » espace stratifié, dont les strates forment les organes...).

Un problème irritant de la théorie des stratifications concerne la notion — nécessaire, mais élusive — de *stratification canonique.* Une classe de T-équivalence (dans le cas analytique, réel ou complexe) ne coïncide pas nécessairement avec une (ou plusieurs) strate(s) d'une stratification de Whitney pour un ensemble analytique. Dans ce dernier cas, on peut chercher à définir ce que serait une stratification de Whitney minimale : on prend les strates par dimension décroissante, et l'on s'efforce d'effacer chaque strate l'une après l'autre, étant entendu que l'espace obtenu après excision d'une strate, complété en son adhérence, doit reconstituer l'espace primitif. On obtiendra ainsi une stratification minimale, mais l'unicité d'une telle stratification fait problème, au moins dans le cas d'un stratifié dans la catégorie lisse.

On se rappelle en effet la pathologie de ces variétés topologiques Y qui ne peuvent être munies d'une structure différentiable que sur le complémentaire d'un fermé K, lequel pourrait n'être pas intrinsèquement défini...

La théorie des stratifications des espaces sous-analytiques a fait récemment de grands progrès. (Voir le livre de Goresky-Mac Pherson : *Stratified Morse Theory*, les travaux de l'école de Łojasiewicz...) Il serait bien utile d'établir le fait suivant : soit $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ une projection d'un ensemble semi-algébrique A sur le semi-algébrique B. On peut alors trouver des stratifications S de A et T de B telles que la restriction de p à la contre-image $p^{-1}(\mathrm{V})$ d'une strate V de T dans B soit une fibration, dont la fibre est un ensemble semi-algébrique, et qu'il existe des stratifications minimales de A et B ayant cette propriété. (Remarque : le morphisme p peut présenter de l'éclatement.) Admettons le fait pour le moment, ces stratifications minimales seront dites « canoniques » pour le morphisme p. On admettra également le fait pour un diagramme de morphismes semi-algébriques entre espaces semi-algébriques. (Si du moins ces diagrammes ne représentent aucune divergence comme :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathrm{Z} \end{tikzcd}$$

car une divergence, on le sait depuis Dufour, compromet la stabilité structurelle locale d'un diagramme.)

Ceci étant dit, désignons par $\mathrm{J}^r(n, p)$ les systèmes de p polynômes de degré r à n variables (x^i) et par y^j les p coordonnées de l'espace-but $\mathbf{R}^p$. Si P est le morphisme canonique de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ défini par $y = \mathrm{P}(x)$, on a la suite de morphismes (sans divergence) :

$$\mathrm{J}^r(n, p) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathrm{J}^r(n, p) \times \mathbf{R}^p \to \mathrm{J}^r(n, p).$$

Stratifions cette suite et localisons les morphismes au voisinage des origines $\mathrm{O}(s)$ sur la source, $\mathrm{O}(b)$ sur le but; on obtient alors une stratification minimale sur $\mathrm{J}^r(n, p) \times (\mathrm{O}(s), \mathrm{O}(b))$ qu'on pourra légitimement considérer comme la stratification canonique de l'espace des jets *locaux*.

Se pose alors la question de savoir si la suite des morphismes canoniques :

$$\to \mathrm{J}^{r+s}(n, p) \to \mathrm{J}^{r+s-1}(n, p) \to \mathrm{J}^r(n, p) \to \dots \to \mathrm{J}^1(n, p)$$

est elle-même « canoniquement » stratifiée. Très probablement, ceci n'a lieu que dans le domaine stable des jets « déterminants ». Si l'on opère sur des jets non déterminants, il faut s'attendre à devoir « substratifier » ces morphismes restrictions, et ceci, en principe, pour tous les ordres; en sorte qu'à un ordre donné les images par projection des strates ainsi obtenues vont se présenter comme une infinité dénombrable d'ensembles semi-algébriques; or tel est l'objet de base de la théorie de la décidabilité « réelle » introduite par S. Smale *et al.* Ceci suggère fortement que le problème :

reconnaître si deux germes de morphismes analytiques

$$\begin{array}{ccc} f:(\mathbf{C}^n, O) & \longrightarrow & (\mathbf{C}^p, 0) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\omega} \\ g:(\mathbf{C}^n, O) & \longrightarrow & (\mathbf{C}^p, 0) \end{array}$$

sont analytiquement conjugués via *des automorphismes locaux* (α, ω) *de la source et du but*

pourrait bien être indécidable en général. Quel serait l'exemple le plus simple d'un tel phénomène ?

En particulier, il se pourrait qu'une condition nécessaire d'isomorphisme s'exprime par une infinité de conditions semi-algébriques ***pour un ordre fini donné.*** Se pourrait-il alors que cette famille de conditions soit suffisante pour tous les ordres supérieurs et implique par suite l'équivalence ? Quel serait l'exemple le plus simple d'une telle situation ?

La construction par Shih Wei Shu d'un gradué associé à un système local d'E.D.P. analytiques paraît susceptible de cette même pathologie, une raison insuffisante, cependant, pour justifier l'ostracisme que la communauté mathématique actuelle voue à l'égard de cette théorie...

b) *Actions algébriques de groupes non compacts*

Rien n'est plus simple que de stratifier l'action lisse d'un groupe compact dans une variété lisse. Il suffit de mettre dans la même strate les points dont les sous-groupes d'isotropie sont conjugués. (Note : c'est ce que font les physiciens, qui appellent *strate* la classe ainsi définie, sans s'occuper si la strate est connexe ou non, un laxisme terminologique à combattre.) Lorsque le groupe est non compact, il peut y avoir de bien désagréables phénomènes de récurrence (orbites partout denses, chaos, etc.). Néanmoins lorsqu'il s'agit d'une action algébrique, on pourrait avoir l'espoir qu'il est possible de définir entre vecteurs de l'algèbre de Lie une relation d'équivalence du type : conserver *grosso modo* le même découpage en classes d'orbites, deux orbites de la même classe étant isotopes dans une isotopie affectant tout l'espace. C'est précisément le problème considéré plus haut dans les espaces de jets (sous l'action des groupes des automorphismes source $\times$ but). Je ne connais aucun moyen d'aborder ce problème de la stratification des actions non compactes, même lorsque *a priori* elles semblent bien régulières...

c) *Espaces stratifiés non séparés*

J'ai toujours été frappé par le fait que le quotient d'un espace vectoriel par le groupe d'automorphismes engendré par un automorphisme hyperbolique avait une structure stratifiée, bien que n'étant pas séparé. Dans l'axiomatique des espaces stratifiés, il faut abandonner la condition que deux strates disjointes de la frontière d'une même strate ont des voisinages disjoints (et, dans le cas précédent, imposer une condition de transversalité entre les fibres des applications d'attachement, ce qui explique la stabilité topologique des automorphismes hyperboliques). Un de mes rêves a toujours été de réaliser une théorie de Morse sur les espaces feuilletés; le quotient de $f < c$, initialement séparé, devient plus tard, pour c croissant, un ensemble stratifié — non séparé — puis plus tard encore un espace « chaotique ». Il y a là, me semble-t-il, tout un magasin d'exemples pour les scénarios de la « Marche au chaos » des dynamiciens.

d) *Stratifications canoniques des espaces fonctionnels*

La notion de stratification canonique me semble devoir jouer un rôle important en analyse fonctionnelle. En effet, avec les topologies $\mathscr{C}^r$ usuelles, les espaces des lacets sur $\mathbf{R}^2$ et sur $\mathbf{R}^3$ sont isomorphes, et ce ne sont pourtant pas les mêmes espaces... Il semble évident que dans un espace d'applications lisses, deux applications voisines ayant même type topologique et des ensembles critiques (et de valeurs critiques) équi-singuliers devraient (en principe) être rangées dans la même strate.

De manière plus précise, il faudrait dire que ces applications ont des singularités « équi-singulières » en ce sens plus large où on permet une variation des modules des singularités, et où on impose une certaine « équisingularité » des ensembles de valeurs critiques : deux applications f, g appartiendraient à une même strate s'il existait des stratifications minimales de ces morphismes qui soient isotopes par une isotopie « trivialement » stratifiée. De manière générale, si X et Y sont deux variétés lisses et si L(X, Y) est l'espace des applications lisses de X dans Y, on stratifiera minimalement la suite de morphismes

$$\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{Y} \times \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

On s'intéressera d'abord aux strates de codimension finie dans l'espace fonctionnel, pour lesquelles on peut utiliser la transversalité. Je vois deux directions à explorer pour cette notion :

a) Un moyen de justifier certaines des « fonctions spéciales » de l'analyse. Par exemple, pour une fonction lisse réelle $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on s'intéressera aux strates de l'espace fonctionnel $\mathrm{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ caractérisées par le fait que la stratification du but se réduit à deux points (deux valeurs critiques, les points critiques étant de Morse dans la source). Les fonctions correspondantes, s'il y a k points critiques de Morse, les valeurs critiques étant $+1$ et -1, sont toutes équivalentes par difféomorphisme de l'axe source au polynôme de Tchebytchev de degré $k+1$. On vérifie alors aisément que si l'on fait tendre le degré $k+1$ vers l'infini, la fonction correspondante tend localement — sur tout compact de **R** — vers une fonction égale à une translatée de cosinus. Autrement dit, les fonctions spéciales apparaîtraient comme des représentants « harmoniques » de strates ouvertes de la stratification sinimale.

b) Que peut-on dire du « nerf » dual à la stratification canonique, réduite à ses strates de codimension finie ? Observons par exemple qu'un entrelacs (*link* en anglais) de la sphère S^3 peut être considéré comme l'image inverse d'une valeur régulière d'une submersion de la sphère S^3 sur la sphère S^2. Les polynômes classiques de la théorie des nœuds (Alexander, V. Jones...) sont définis par une loi algébrique de récurrence lorsqu'on traverse dans $L(S^3, S^2)$ une strate de codimension un. Ceci suggère très fortement que ce nerf est engendré par un mécanisme algébrique sous-jacent. Observons enfin que si l'on considère les germes d'hypersurfaces analytiques complexes $F(z)$ ayant l'origine pour singularité isolée comme formant un espace analytique E fibré sur un déploiement universel (D) lui-même de dimension infinie (le degré de l'hypersurface F tendant vers l'infini), alors le discriminant (d'ordre infini) Δ définit dans son complémentaire une monodromie locale (pour l'homologie évanouissante) qui dans la source est un groupe de Coxeter engendré par les réflexions par rapport à un système d'hyperplans. (L'ensemble de ces hyperplans est une désingularisation de l'ensemble $F^{-1}(\Delta)$ contre-image du discriminant Δ.) L'ensemble des groupes ainsi obtenus recouvre, semble-t-il, tous les groupes finis simples connus. C'est dire l'intérêt qui s'attache à la notion...

Remerciements

Je ne voudrais pas terminer ce texte sans remercier très chaleureusement tous les collègues qui, parfois venus de fort loin, m'ont réconforté par leur apport mathématique, ou simplement par leur présence amicale au Colloque de 1988. Toute ma reconnaissance va aux organisateurs : Marc Chaperon, Alain Chenciner, Lè Dung Trang et Robert Moussu qui n'ont pas ménagé leurs peines au cours de l'année de préparation 1987-1988. Ils ont bénéficié durant cette année de l'aide secrétariale de Mme Véronique Houllet que l'I.H.E.S. avait détachée dans ce but. Enfin, *last but not least*, il me faut citer les institutions dont les subventions ont permis cette commémoration : le C.N.R.S., les ministères des Universités, des Affaires étrangères, l'U.A.P. Le hasard a voulu que le jour même où je mettais à ce texte un point final, on m'annonçait la mort de Léon Motchane, fondateur de notre Institut, et qui en fut le directeur jusqu'à sa retraite. Il serait bien vain de ma part d'évaluer ma dette à l'égard de l'I.H.E.S., où je suis entré en 1963, et où l'atmosphère de liberté que le directeur-fondateur, et ses successeurs, y ont constamment maintenue, m'a permis un développement sans doute fort hétérodoxe pour un mathématicien. En ce sens j'ai pleine conscience de ne jamais pouvoir m'acquitter de la dette de reconnaissance que j'ai contractée vis-à-vis de Léon Motchane et de son œuvre.

RÉFÉRENCES

J.-P. Françoise, Systèmes maximaux d'une singularité quasi homogène, *C.R.A.S.*, série A, **290** (16 juin 1980), 1061-1064.

E. Heil, Existenz eines 6-Normalenpunktes in einem konvexen Körper, *Archiv Math.*, **32** (1979), 412-416; correction dans *Archiv Math.*, **33** (1979), 496. Cet article mentionne le résultat de Deo-Klamkin cité dans le texte.

E. Heil, Concurrent normals and critical points under weak smoothness assumptions, in *Discrete Geometry and Convexity*, ed. J. E. Goodman, *Ann. New York Acad. Sci.*, **440** (1985), 170-178. Cet article mentionne les conjectures de Hentschke et Zamfirescu rapportées dans le texte.

J.-P. Dufour, Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.* (4), **10** (1977), 153-174.

S. Smale (avec M. Shub), Computational complexity. On the geometry of polynomials and a theory of cost, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.*, **18** (1985), 107-142.

Shih Wei Shu, Une méthode élémentaire pour l'étude des équations aux dérivées partielles, *Diagrammes*, vol. 16, Paris, Université de Paris VII, 1986.

Institut des Hautes Etudes scientifiques
35, route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette

Manuscrit reçu le 31 janvier 1990.