

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 74 (1948)
Heft: 19: Comptoir Suisse Lausanne, 11-26 septembre 1948

Artikel: La mécanique aléatoire et le problème de la turbulence
Autor: Baatard, François
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56034>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE

DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francsPour les abonnements
s'adresser à la librairie**F. ROUGE & Cie**
à LausannePrix du numéro :
1 Fr. 25

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoises et genevoises des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : Fribourg : MM. † L. HERTLING, architecte; P. JOYE, professeur; Vaud : MM. F. CHENAUX, ingénieur; † E. ELSKES, ingénieur; E. D'OKOLSKI, architecte; A. PARIS, ingénieur; CH. THÉVENAZ, architecte; Genève : MM. L. ARCHINARD, ingénieur; E. MARTIN, architecte; E. ODIER, architecte; Neuchâtel : MM. J. BÉGUIN, architecte; G. FURTER, ingénieur; R. GUYE, ingénieur; Valais : MM. J. DUBUIS, ingénieur; D. BURGÈNER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

TARIF DES ANNONCESLe millimètre
(larg. 47 mm.) 20 cts.Réclames : 60 cts. le mm.
(largeur 95 mm.)Rabais pour annonces
répétées**ANNONCES SUISSES S.A.**5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26LAUSANNE
et Succursales**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**

A. STUCKY, ingénieur, président; M. BRIDEL; G. EPITAUX, architecte; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : La mécanique aléatoire et le problème de la turbulence, par FRANÇOIS BAATARD, ingénieur E. P. L. — Essai sur le caractère de l'architecture tchèque, par KAREL HONZIK, Dr ing., architecte. — LES CONGRÈS : Assemblée générale ordinaire de l'Association suisse pour l'Aménagement des Eaux. — CARNET DES CONCOURS. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT. — INFORMATIONS DIVERSES.

La mécanique aléatoire et le problème de la turbulence

par FRANÇOIS BAATARD, ingénieur E. P. L.

C'est l'échelle d'observation qui crée le phénomène.

Cas-Eug. GUYE, *L'évolution physico-chimique.**Introduction*

Important dans maints domaines divers (mécanique des fluides, météorologie, aérodynamique, astrophysique, etc.), le problème de la turbulence semble trouver aujourd'hui, grâce aux travaux de MM. Dedebeant et Wehrlé, une solution satisfaisante. De nombreuses tentatives (Navier, Boussinesq, Reynolds, Prandtl, von Karman, Taylor, Gebelein) échouèrent ou apparurent insuffisantes. Il ne pouvait en être qu'ainsi, car l'instrument d'attaque du problème n'était pas au point. Ces théories ont cependant laissé des traces intéressantes qui ont guidé les recherches ultérieures.

L'histoire de la science, et celle de la physique théorique en particulier, montre une quantité de questions résolues grâce à l'arsenal adéquat fourni, sans idées préconçues d'ailleurs, par les mathématiciens. Citons : Newton, le calcul différentiel et intégral et la mécanique; Einstein, le calcul tensoriel et la relativité; Heisenberg, l'algèbre des matrices et la mécanique quantique; les séries de Fourier, l'acoustique et l'électrotechnique. On ne niera pas non plus que les questions touchant de près ou de loin au hasard (jeux, assurances, biométrie, théories cinétiques, radioactivité, etc.) trouvent leur moyen d'expression dans le calcul des probabilités. C'est précisément le développement fructueux d'une ramification moderne de ce calcul, les fonctions aléatoires, qui permit à MM. Dedebeant et Wehrlé d'établir une mécanique très générale, la mécanique aléatoire, particulièrement bien adaptable au problème de la turbulence (entre autres); de plus, la possibilité de construire des appareils (Kampé

de Ferriet à Lille, Angleterre, U. S. A.) donnant expérimentalement les grandeurs introduites dans la théorie, en permet la marche de pair avec l'expérience. On dispose d'ailleurs pour cette étude de magnifiques laboratoires naturels : l'atmosphère, les nuages, les rivières, les fumées, etc.

Pourquoi ne pas utiliser, dans le problème qui nous préoccupe, la mécanique classique des fluides? Parce que l'expérience montre que la turbulence est un phénomène statistique, discontinu dans l'espace et dans le temps, et dont l'évolution... aléatoire, précisément, ne peut se traduire qu'à l'aide des conceptions nouvelles. C'est le souci de se rapprocher des phénomènes naturels qui a conduit MM. Dedebeant et Wehrlé à faire de la mécanique aléatoire le langage de la turbulence. Cette mécanique, une mécanique statistique qui introduit un concept de probabilité à sa base, permet non seulement une meilleure transcription du réel, mais encore l'établissement de lois de prévisions intéressantes et un pouvoir d'explication étendu.

1. La turbulence

L'aspect d'un écoulement change considérablement dès l'instant où son nombre de Reynolds dépasse une certaine limite. Alors que pour de petits nombres de Reynolds l'écoulement se faisait tranquille, par filets parallèles, les gouttes liquides glissant les unes sur les autres sans se mélanger, caractérisant de la sorte l'écoulement laminaire, il apparaît brusquement un véritable changement d'état du fluide pour le nombre de Reynolds critique : agitation désordonnée

directement visible, vitesse variant rapidement en grandeur et en direction, mélange des couches, etc. Ce changement d'état, discontinu, se produit dans le temps et dans l'espace. La turbulence naît au voisinage des parois ou à la suite de frottements internes dans le fluide. Les deux régimes, laminaire et turbulent, coexistent parfois, mais séparés nettement (couche limite de Prandtl). Il existe des phénomènes intermédiaires, sans véritable turbulence (ex. : tourbillons alternés).

2. Variables de Lagrange, variables d'Euler

L'équation fondamentale de la dynamique, appliquée à un fluide de masse ρ , soumis à une force extérieure \vec{F} , donne : $\vec{J} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$ où \vec{J} = accélération et p = pression.

On peut dès lors donner la description du mouvement d'après les coordonnées ou variables de Lagrange, consistant à suivre une particule (fig. 1).

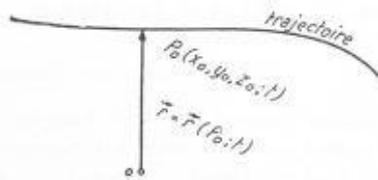


Fig. 1.

(x, y, z, t) : coordonnées du point P = variables de Lagrange.

L'équation du mouvement du point P suivant son vecteur-lieu est :

$$\vec{r} = \vec{r}(P; t), \text{ avec } \vec{J} = \frac{\partial^2 \vec{r}(P; t)}{\partial t^2}$$

Les variables d'Euler permettent de « regarder » la vitesse $\vec{W}(P; t)$ (fig. 2).



Fig. 2.

W_x, W_y, W_z , composantes de \vec{W} , sont les variables d'Euler.

On passe des variables de Lagrange à celles d'Euler en

intégrant $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{W}(P; t)$

$$\vec{J} = \frac{\partial \vec{W}(P; t)}{\partial t} + \vec{W}(\vec{\nabla}) \vec{W} = \frac{d\vec{W}}{dt}$$

variation dans le temps de \vec{W} + variation dans l'espace de \vec{W} = variation totale de \vec{W}

où $\vec{\nabla}$ représente l'opérateur :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Il y a deux dérivées bien distinctes dans l'expression de \vec{J} :

1° $\frac{\partial}{\partial t}$ = taux de variation en un point de l'espace, ou dérivée locale ($t \neq t'$; $P = P'$) ;

2° $\frac{d}{dt}$ = taux de variation le long de la trajectoire de la particule, ou dérivée moléculaire ($t \neq t'$; $P \neq P'$).

* Rapportée à l'unité de masse.

On suit donc le mouvement en examinant la variation dans le temps et dans l'espace du champ des vitesses.

\vec{r} peut être développé en série :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}(t-t_0) + \frac{\vec{b}}{2}(t-t_0)^2$$

où $\vec{r}_0 = \vec{r}(P_0; t_0)$

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{r}(P_0; t)}{dt} \right]_{t=t_0} = \vec{W}(P_0; t_0)$$

$$\vec{b} = \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_{P_0} \text{ etc.}$$

3. L'équation de continuité

Elle exprime que le fluide est conservatif.

Si le fluide est incompressible, sa masse spécifique est constante et l'équation de continuité se réduit à :

$$\text{div } \vec{W} = 0 \text{ ou } \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = 0$$

4. La description des tourbillons d'après Helmholtz

Elle s'obtient en modifiant l'équation d'Euler ; si $\vec{W}(P; t)$ représente le champ des vitesses, le vecteur tourbillon est

défini par : $\vec{T}(P, t) = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{W}$, lequel, introduit dans l'équation d'Euler, donne :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - 2 \vec{W} \wedge \vec{T} = - \text{grad} \left(\frac{W^2}{2} + P - U \right)$$

où $P(p) =$ énergie potentielle interne de pression = $\int_0^p \frac{dp}{\rho}$

et $U =$ énergie potentielle.

Le vecteur \vec{T} obéit à l'équation de Helmholtz, qui permet d'en suivre l'évolution :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{T}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{T}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{W}$$

Dans un champ de forces dérivant d'un potentiel, c'est-à-dire si $\vec{F} = - \text{grad } U$, le théorème de Lagrange exprime la conservation du tourbillon :

$$\frac{\vec{T}}{\rho} = \left(\frac{\vec{T}}{\rho} \right)_0 + (t-t_0) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{T}}{\rho} \right) \right)_0 + \dots$$

ce qui peut s'énoncer : un fluide ne peut acquérir de rotation si elle n'existe pas à l'instant initial.

5. Equation de Bernoulli

Dans le cas d'un potentiel des vitesses, c'est-à-dire si $\vec{W} = \text{grad } \phi$, ce qui entraîne nécessairement $\text{rot } \vec{W} = 0$, le mouvement est donc irrotationnel. Ajoutons encore la condition de la permanence du mouvement, c'est-à-dire que les dérivées par rapport au temps $\frac{\partial}{\partial t}$ de W, ρ, p , soient nulles.

Les équations d'Euler se transforment alors en équation de Bernoulli et le long d'une ligne de courant on a la relation :

$$\frac{W^2}{2} + U(P) + \int_0^p \frac{dp}{\rho} = \text{constante}$$

ce qui s'énonce : dans un mouvement permanent, la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie interne acquise sous l'effet d'une augmentation de pression est constante.

6. Fluides réels

L'hydrodynamique classique, qui s'exprime avec les équations rappelées ci-dessus, se présente en une théorie élégante et mathématiquement impeccable ; mais elle concerne des fluides parfaits, de viscosité nulle ; elle aboutit cependant à des paradoxes gênants ; établie dans des conditions très restrictives, son application aux fluides réels, visqueux, turbulents, à mouvements non permanents, soulève de graves difficultés ; d'où l'empirisme des équations chargées de coefficients des fluides réels, parfois très nombreuses et diverses pour rendre compte d'un seul phénomène (pensons à certains calculs de perte de charge). D'autre part, la théorie d'Helmholtz veut des tourbillons indestructibles alors que la nature les montre éphémères ; une particule turbulente diffuse et n'est par conséquent pas assimilable à un point matériel pouvant être suivi en coordonnées de Lagrange. Le nombre de Reynolds, critère de turbulence, est une notion expérimentale utile, mais très restreinte et insuffisante à elle seule à rendre compte des divers étages de turbulence. Un fluide réel dissipe de l'énergie, ce qui rend inexacte l'équation de continuité. Suivant l'échelle d'observation, il apparaît un mouvement d'ensemble du fluide et un mouvement d'agitation qui n'obéissent pas aux mêmes lois. Ajoutons que ces mouvements d'agitation sont si compliqués qu'il est impossible de les représenter par les fonctions dérivables et continues de l'analyse, ce qui ressort des difficultés d'interprétation des enregistrements dans lesquels la sensibilité des appareils joue un rôle capital. Ce n'est pas parce qu'un instrument de sensibilité insuffisante trace une courbe continue qu'il s'ensuit que dans sa nature intime, le phénomène ainsi représenté soit une fonction continue et dérivable du temps.

Choisies parmi un grand nombre, ces quelques critiques montrent qu'une voie nouvelle devait être cherchée, ce que Navier, Boussinesq, Reynolds tentèrent d'entreprendre.

7. Les équations de Navier

Elles traduisent le mouvement d'un fluide réel visqueux, cette dernière qualité se traduisant par une dissipation d'énergie. Ces équations reposent cependant sur une hypothèse assez gratuite : celle d'une relation linéaire entre les tensions et les vitesses de déformation (Stokes) ; en outre, on suppose des coefficients de viscosité constants, ce qui fait que ces équations ne sont valables que dans des cas assez restreints : viscosité normale, vitesses pas trop grandes, en général régimes laminaires, nombres de Reynolds petits.

Voici les équations de Navier-Stokes, écrites dans un cas un peu simplifié (le cas général nécessitant des notations un peu complexes et des considérations tirées de la théorie de l'élasticité) :

$$\underbrace{\rho}_{\text{densité du fluide}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \underbrace{\rho X}_{\text{composante de la force extérieure agissant sur le fluide}} - \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu}_{\text{coefficient de viscosité}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

les composantes de la vitesse au point (x, y, z, t) étant (u, v, w) .

Il est normal, vue la dissipation d'énergie due aux forces de viscosité, d'adjoindre l'équation de la propagation de la chaleur de Fourier :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \Sigma u \frac{\partial T}{\partial x} = k \cdot \text{lap } T$$

En combinant cette relation avec celles de Navier et de l'énergie cinétique du mouvement d'ensemble $W = \frac{1}{2} \Sigma \rho u^2$, on obtient le bilan suivant des énergies :

Variation totale de la force vive du fluide = Travail des forces extérieures appliquées au centre de gravité + Travail des tensions extérieures appliquées à la surface limite + Travail des forces intérieures à chaque particule

Si T_{ik} désigne le tenseur des tensions, on aurait :

$$\text{Dissipation } D = \text{travail des forces intérieures} = \sum_{ik} T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

8. L'idée de Boussinesq

Le premier, cet auteur proposa la décomposition du mouvement turbulent en un mouvement moyen et un mouvement d'agitation (fig. 3).

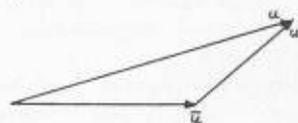


Fig. 3.

Si \bar{u} = vitesse moyenne,
 u' = vitesse instantanée,
 $u'' = u' - \bar{u}$ définit alors la vitesse d'agitation (fluctuation).

Boussinesq appliqua les équations de Navier au mouvement moyen, mais en remplaçant le coefficient de viscosité par un coefficient de frottement interne, plus grand.

9. La théorie de Reynolds

Reynolds, se basant sur une analogie entre l'agitation moléculaire et la turbulence, transposa, par changement d'échelle, les propriétés de la molécule à la particule. Si Ω désigne un volume contenant à l'instant t un nombre suffisamment grand de particules pour que la moyenne \bar{u} ait un sens, Reynolds pose :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} u_i(x, t) d\Omega_i$$

Appliquant dès lors les équations de Navier à ces particules, Reynolds calcule le mouvement turbulent d'ensemble en opérant la moyenne sur ces équations auxquelles il adjoint celle de la continuité, ce qui donne :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_k \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = X_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k}$$

équations moyennes de Reynolds

$$\sum_k \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0.$$

équation de continuité moyenne

où (u_1, u_2, u_3) = composantes de la vitesse au point (x_1, x_2, x_3) ,
 i et k étant deux indices variant de 1 à 3 ; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$

Conclusion importante : Ces équations s'obtiennent en remplaçant dans les équations primitives de Navier les grandeurs initiales par leurs moyennes et en ajoutant aux tensions de Navier dues à la viscosité les tensions — $\rho u'_i u'_k$ — purement turbulentes.

On discerne dès lors trois étages d'énergie qui se transforment en cascade de la manière suivante :

- a) énergie cinétique du mouvement moyen, ou étage supérieur ↓
- b) énergie cinétique d'agitation des particules, ou étage moyen ↓
- c) chaleur.

Si cette théorie marque déjà d'intéressants progrès, il y a néanmoins certaines incertitudes (choix de Ω permettant le calcul de \bar{u} , notion de particule) qui prêtent flanc à de sérieuses critiques. Quant au calcul des moyennes utilisé par Reynolds, il n'est pas valable sans restriction. D'autre part, les mouvements turbulents étant très compliqués, est-il possible de leur attacher des fonctions intégrables au sens de Riemann ? Malheureusement pas, comme nous le verrons plus tard. Notons encore que la théorie de Reynolds admet les équations de Navier valables pour le mouvement d'agitation, alors qu'elles exigent déjà une grande prudence pour des mouvements réguliers.

Pour la première fois cependant, la turbulence se manifeste par les tensions — $\rho u'_i u'_k$ — en plus de celles de la viscosité.

10. La mécanique de l'écoulement turbulent dans les conduites fermées

Il s'agit d'une application de la théorie de Reynolds faite par Prandtl, von Karman et Nikuradse aux écoulements dans les conduites de sections circulaires. La nouveauté consiste à admettre entre u'_i et u'_k une corrélation statistique régulière exprimée par la relation $u'_i u'_k = \text{cte}$. Cette théorie reprend certaines grandeurs introduites par Boussinesq tout en en introduisant de nouvelles (longueur de mélange de Prandtl).

L'équation de Prandtl traduit l'apport de la turbulence dans la contrainte agissant axialement au contact de deux couches (fig. 4).

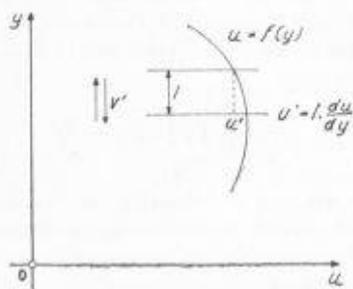


Fig. 4.

Soient A et B deux couches liquides en mouvement à des vitesses u_i et u_k . Par suite de la turbulence, il y a échange de particules à une vitesse v' entre A et B, ou échange de leurs quantités de mouvement.

Si $u_i < u_k$ par exemple, la tranche B reçoit la particule à une vitesse $v' = (u_i - u_k)$. Cet échange se traduit par l'apparition d'une contrainte tangentielle $\tau = \rho v' u'_k$. La vitesse u est fonction du diamètre y de la conduite et Prandtl

introduit la quantité $l =$ longueur de mélange par la relation :

$$u' = l \frac{du}{dy}$$

L'équation de Prandtl est alors la suivante :

$$\tau = \rho \cdot u' \cdot v' = \rho \cdot l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \underbrace{\left(\rho \cdot l^2 \frac{du}{dy} \right)}_{\sigma} \frac{du}{dy} = \sigma \cdot \frac{du}{dy}$$

où σ = facteur de turbulence (Boussinesq).

Von Karman a déduit de là diverses lois de similitude (forme identique des courbes de répartition des vitesses turbulentes dans les parties centrales des conduites). Il les énonce après avoir divisé les phénomènes en une classe différentielle (ex. : vitesses) et une classe intégrale (ex. : rugosité) ; y interviennent des lois de distribution des longueurs de mélange et des vitesses, mais avec l'aide d'un très grand nombre de paramètres.

11. Quelques applications du calcul des probabilités au problème de la turbulence

Définissons tout d'abord un degré de turbulence ; d'après ce qui précède, on peut poser le bilan suivant des énergies :

Energie cinétique du mouvement turbulent	Energie cinétique du mouvement moyen	Energie cinétique d'agitation :
=	+	$\frac{u'^2, v'^2, w'^2}{2}$ (si on a une particule de masse 1).

$\bar{u}^2 =$ vitesse quadratique moyenne.

En soufflerie, on définit l'intensité de la turbulence par le rapport : $T_1 = \frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{U_0}$ où $U_0 =$ vitesse moyenne à l'entrée de la soufflerie.

Si la turbulence est homogène et isotrope, c'est-à-dire si $\bar{u}'^2 = \bar{v}'^2 = \bar{w}'^2$:

$$T_1 = \sqrt{\frac{1/3 \text{ de l'énergie cinétique d'agitation}}{\text{énergie cinétique du mouvement moyen}}}$$

Considérons maintenant l'enregistrement de la pression dynamique q donnée par un tube de Pitot, $q = f(t)$. Il permet de définir :

$$\bar{q} = \frac{1}{t} \int_0^t q dt = \frac{1}{t} \text{ aire } (oAabcdBDo) = \text{pression dynamique moyenne (fig. 5)}$$

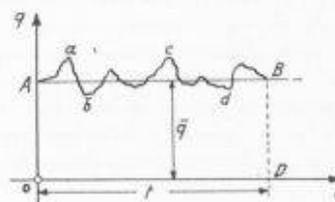


Fig. 5.

La vitesse moyenne correspondant à \bar{q} n'est pas la vitesse moyenne \bar{u} mais U telle que

$$\bar{q} = \frac{\rho U^2}{2} \text{ et que } q = \frac{\rho \cdot u^2}{2} \text{ (instantanée)}$$

$$\text{Donc : } \rho \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\rho u^2}{2} dt \text{ et } U = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t u^2 dt}$$

La lecture d'un manomètre permet de définir ainsi la vitesse efficace et U efficace $> \bar{u}$ moyen. La différence entre U et \bar{u} est d'autant plus grande que le courant est plus turbulent. Un mouvement non permanent n'étant pas nécessairement turbulent, la définition du degré de turbulence par $\sqrt{\frac{u'^2}{U_0^2}}$ peut parfois donner un résultat mathématique sans sens physique (si, par ex., $u = \bar{u} + u'_0 \sin \omega t$).

Il est facile de calculer la répartition des vitesses turbulentes u' autour de la vitesse moyenne \bar{u} ; u' varie autour de \bar{u} de 0 à u' en prenant toutes les valeurs intermédiaires. S'il y a en effet (fig. 6)

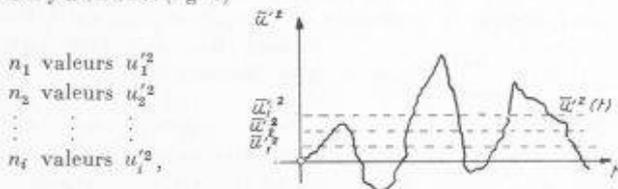


Fig. 6.

la parallèle à ot passant par $\bar{u}_i'^2$ coupant la courbe des enregistrements en n_i points, les fréquences des différentes vitesses sont :

$$p_1 = \frac{n_1}{N}, p_2 = \frac{n_2}{N}, p_i = \frac{n_i}{N} \text{ avec } N = n_1 + n_2 + n_i + \dots = \sum_1^n n_i$$

En reportant $p_i = \frac{n_i}{N}$ en ordonnée, et $\bar{u}_i'^2$ en abscisse, on a les courbes de fréquence des vitesses entre A et B . Ces courbes, courbes en cloche de Gauss, ont pour équation :

$$p = \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 x^2} \text{ (fig. 7)}$$

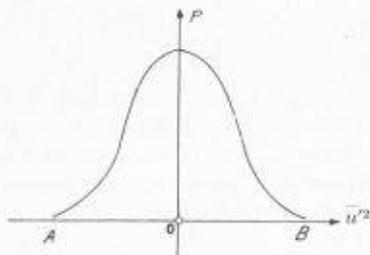


Fig. 7.

Si la région turbulente observée est un mélange de deux régions turbulentes homogènes, on obtient des courbes à deux sommets résultant de l'addition des fréquences empiétant l'une sur l'autre :

$$p = \frac{K_1}{\sqrt{\pi}} e^{-k_1^2 x^2} + \frac{K_2}{\sqrt{\pi}} e^{-k_2^2 x^2} \text{ (fig. 8)}$$

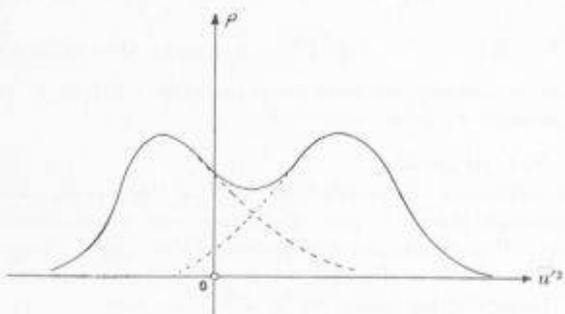


Fig. 8.

On peut définir la turbulence à partir de la courbe des fréquences. S'il ne se présente qu'une seule courbe en cloche, la turbulence est homogène et cette courbe donne le degré de turbulence. En effet :

$$\text{Moyenne absolue de } x = \bar{u}^2: |\bar{x}| = \frac{1}{N} \sum n_i x_i = \sum p_i x_i$$

$$|\bar{x}| = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K^2 x^2} |x| dx = \frac{1}{K\sqrt{\pi}}$$

$$\text{et la valeur moyenne de } u'^2 \text{ est : } |\bar{x}| = \bar{u}^2 = \frac{1}{K\sqrt{\pi}}$$

Le degré de turbulence montre que :

\bar{u}^2 est proportionnel à $\frac{1}{K}$, donc, si la turbulence augmente, l'ordonnée à l'origine diminue et la courbe en cloche s'aplatit et devient de plus en plus large à mesure que croît la turbulence. (Physiquement, l'égalisation autour de la moyenne est plus rapide).

Si \bar{u}^2 présente une variation périodique et sinusoïdale, l'écoulement possède un degré de turbulence, mais la courbe se réduit à une parallèle à l'axe des ot , car :

$$\frac{n_1}{N} = \frac{n_2}{N} = \dots = \frac{n_i}{N}$$

De toute façon, un écoulement sera d'autant plus turbulent que la courbe en cloche sera mieux formée.

La valeur réduite de l'écart absolu est, par définition :

$$|\bar{\lambda}| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} |\lambda| d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$|\bar{x}|$ est lié à $|\bar{\lambda}|$ par $|\bar{\lambda}| \cdot U$ et $U =$ unité d'écart absolu.

$$\text{On a encore } U^2 = \sum 2n_i p_i q_i$$

$$\text{avec : } p_i = \frac{n_i}{N} \text{ et } q_i = \frac{N - n_i}{N} = 1 - \frac{n_i}{N} = 1 - p_i$$

La valeur moyenne de u'^2 est

$$\bar{u}^2 = |\bar{x}| = \frac{U}{\sqrt{\pi}} \text{ et } U = \frac{1}{K}$$

Dans le cas d'un régime laminaire : $u' = 0$ et $U = 0$ (enregistrement donnant une droite o confondue avec l'axe ot); dans ce cas d'ailleurs, $p = 1$ et $q = 0$ et $U = \sqrt{2npq} = 0$; donc $U =$ unité d'écart absolu $= 0$ pour le régime laminaire (fig. 9).

U est variable suivant la turbulence et $\bar{u}^2 = \frac{U}{\sqrt{\pi}}$ représente une droite passant par O et telle que $\text{tga} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

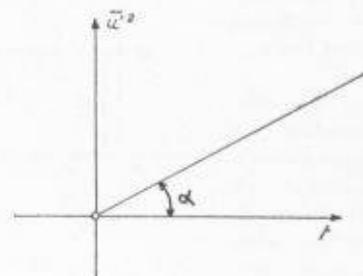


Fig. 9.

¹ DUBOIS, Thèse Fac. Sc., Caen 1938.

Remarque : On peut calculer $\overline{u'^2}$ de deux façons :

a) par planimétrie : $\overline{u'^2} = \frac{1}{t} \int_0^t u'^2 dt$

b) en calculant la moyenne

$$\overline{u'^2} = \frac{n_1 \cdot \overline{u_1'^2} + n_2 \cdot \overline{u_2'^2} + \dots}{N} = \frac{1}{N} \sum n_i \cdot \overline{u_i'^2}$$

Notons, d'autre part, que les courbes de fréquence permettent de distinguer par le nombre de leurs sommets le nombre et le genre des turbulences (de paroi, de sillage, etc.).

12. Le coefficient de corrélation

Comparons deux enregistrements de fluctuations de vitesses en deux points P et Q différents :

corrélation modérée ; $\overline{u'_p u'_q} \neq 0$, car il existe en moyenne une relation entre les fluctuations en P et Q (fig. 10) ;

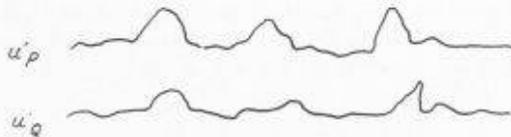


Fig. 10.

faible ou mauvaise corrélation : $\overline{u'_p u'_q} = 0$, car pour une valeur de u'_p il y a autant de valeurs positives ou négatives de u'_q (fig. 11).

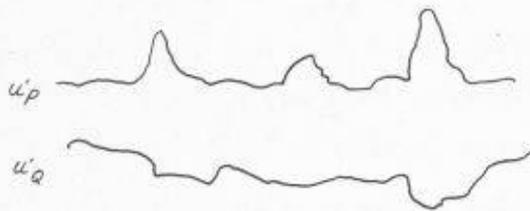


Fig. 11.

On définit le coefficient de corrélation par la relation :

$$\begin{matrix} 0 & & 1 \\ \text{aucune corrélation} & \leq \frac{\overline{u'_p u'_q}}{\sqrt{\overline{u_p'^2}} \cdot \sqrt{\overline{u_q'^2}}} \leq & \text{liaison fonctionnelle} \\ & & \text{linéaire} \end{matrix}$$

(définition identique à celle de la statistique appliquée, biométrie, économie, etc.).

On caractérise ainsi la turbulence par les produits des vitesses d'agitation aux divers points, $\overline{u'_p u'_q}$ représentant la valeur moyenne des produits dans le temps. Si la distance $d = PQ$ des deux points varie, le coefficient de corrélation r est fonction de d (fig. 12).

La corrélation ainsi définie est très imparfaite ; si $r = 0$, on n'est pas sûr qu'il y ait indépendance, et l'on peut avoir un coefficient de corrélation non nul alors que la corrélation dégénère en liaison non aléatoire.

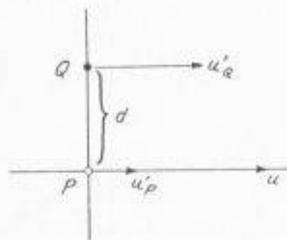


Fig. 12.

13. La théorie de Taylor (dans un cas simple)

Elle introduit la notion de corrélation en mécanique des fluides, non seulement, comme dans la théorie de Reynolds, sous la forme $\overline{u'_i u'_j}$ de la moyenne du produit des vitesses d'agitation à un instant donné, mais en considérant ces grandeurs prises à deux instants différents. Taylor admet, comme Reynolds, des particules douées d'un mouvement d'agitation et dont les vitesses sont des fonctions continues et dérivables du temps.

Suivons les particules dans leur mouvement, d'après Lagrange, et formons les moyennes des vitesses $V(t), V(t+h), [V(t)]^2, [V(t+h)]^2$ à deux instants différents t et $t+h$. On en peut déduire le coefficient de corrélation $R(h)$ entre les vitesses des particules aux deux instants différents t et $t+h$.

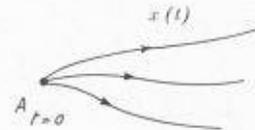


Fig. 13.

Pour simplifier, admettons que toutes les particules soient en A à l'instant $t = 0$, et soient $x(t)$ leurs positions, que nous suivons (fig. 13).

On peut écrire : $\frac{1}{2} \frac{d}{dh} \overline{x^2(h)} = \overline{x(h) v(h)}$

(puisque $v = \frac{d}{dh} x$)

mais $x(h) = \int_0^h V(s) ds$, $s =$ paramètre d'intégration,

donc : $\frac{1}{2} \frac{d}{dh} \overline{x^2(h)} = \int_0^h \overline{V(s)V(h)} ds$

et $\frac{1}{2} \frac{d}{dh} \overline{x^2(h)} = \int_0^h \overline{V'(s)V'(h)} ds$

Ce qui s'énonce : La dérivée de l'écart quadratique moyen est l'intégrale du coefficient de corrélation.

Admettons la permanence de l'agitation, $\overline{V'(s)V'(h)} ds$ ne dépend alors que de $(h-s)$. On peut poser $\overline{V'^2} = C^2$, C^2 étant la vitesse quadratique moyenne d'agitation. Par définition, on a :

$$\overline{V'(s)V'(h)} = C^2 R(h-s) \text{ et par suite}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dh} \overline{x^2(h)} = C^2 \int_0^h R(h-s) ds = C^2 \int_0^h R(s) ds$$

On peut tirer de là d'intéressantes conclusions :

1° Si h est très petit : $R(s) \cong 1$ et $\frac{1}{2} \frac{d}{dh} \overline{x^2(h)} = C^2 h$.

$$\sqrt{\overline{x^2}} = h \cdot C \quad \sqrt{\overline{x^2}} = \text{dispersion des particules.}$$

Cette dispersion est donc proportionnelle au temps, dans le voisinage du point origine A.

2° Si h est grand :

Le coefficient de corrélation $R(h)$ est très petit, car le mouvement initial a peu d'influence sur le mouvement lointain. Prandtl, dans son hypothèse du mélange, a proposé que R devienne négligeable dès l'instant où la particule a été renouvelée par suite de la diffusion. Soit

$$\theta = \int_0^{\infty} R(s) ds \text{ cet instant (h est comparé à } \theta).$$

La longueur de corrélation est dès lors définie de la manière suivante :

$$l_1 = C \cdot \theta = C \cdot \int_0^{\infty} R(s) ds.$$

On a donc, $\int_0^{\infty} R(s) ds$ étant remplaçable pratiquement

$$\text{par } \int_0^{\infty} R(s) ds = \theta.$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dh} \overline{x^2(h)} = C^2 \theta \quad \text{et} \quad \overline{x^2} = 2 \cdot C^2 \cdot \theta \cdot h = 2Cl_1 \cdot h,$$

d'où le résultat important suivant :

La longueur de mélange l_1 joue en turbulence, le rôle que joue le libre parcours moyen d'une molécule dans la théorie cinétique des gaz.

Pour être complet, il faudrait donner l'expression de la corrélation dans le système des variables d'Euler ; ainsi un écoulement turbulent d'agitation C est complètement déterminé. Plaçons-nous en deux points A et B à l'instant $t = t_1$; mesurons-y les vitesses $U(\alpha)$ et $U(\beta)$ des particules qui y passent. Toujours dans le cas simple d'un mouvement permanent, on forme les moyennes temporelles des produits $U(\alpha)U(\beta)$ (fig. 14).

De là il est possible de tirer le coefficient de corrélation $r(\xi)$ entre $U(\alpha)$ et $U(\beta)$ et de former l_2 , longueur de corrélation dans le système des variables d'Euler :



Fig. 14.

$$l_2 = \int_0^{\infty} r(\xi) d\xi.$$

Ainsi, l'identité de deux écoulements turbulents est définie par l'identité de leurs fonctions de corrélation (développées en série).

(A suivre.)

Essai sur le caractère de l'architecture tchèque¹

On sait combien change à mesure l'aspect des constructions, des villages, des villes, voire des pays que l'on traverse d'un pays d'Europe à un autre.

Si on bandait les yeux d'un architecte expérimenté et si, par exemple, on le transportait de Bohême en Bavière, puis en Hollande, en France et en Angleterre, il dirait certainement avec précision chaque fois qu'on lui ôterait le bandeau des yeux, dans quel pays il a été transporté s'il ne voyait autour de lui que des maisons et des rues, fût-ce des maisons et une rue sans importance de type moyen, sans inscriptions indicatrices.

Souvent on s'est posé la question de savoir si les œuvres de l'architecture moderne portent des signes nationaux et locaux caractéristiques qui étaient jusqu'ici observés dans les constructions des temps passés.

¹ Cet article, dû à M. KAREL HONZIK, Dr ing., architecte, a paru dans le N° 3-4, 1948, de la revue française *Techniques et Architecture*.

Il est vrai que l'architecture moderne de tous les pays est issue du même moule international, et qu'elle est même dans ses tendances, internationale. Ses œuvres, on les trouve ordinairement noyées au milieu de la grande masse des constructions antérieures dont elle se différencie d'une manière frappante, comme un élément étranger. Mais dès aujourd'hui, après quinze ou vingt ans de durée de ce modernisme, nos yeux se sont accoutumés à reconnaître les liens curieux qui unissent cette architecture d'avant-garde avec la tradition du pays et à sa production moyenne anonyme. Si nous ouvrons un livre dans lequel est passé en revue le catalogue de leurs œuvres par pays, nous constatons avec étonnement comment les différentes nations s'expriment différemment d'après ce langage international. Si l'on présente le livre à un architecte expérimenté et si on lui dissimule les noms de l'auteur et du pays, il arrivera rarement qu'il se trompe sur la désignation géographique du lieu.

Ainsi s'ouvre à nous un champ nouveau et important d'étude et de découvertes et c'est ce qui constitue le caractère de l'architecture.

Avant d'entreprendre une telle étude, il sera nécessaire de s'entendre sur certaines notions et sur certains termes.

Le caractère peut « exprimer » soit ce qui se fait en matière de constructions ou ce qui se fait dans l'esprit de l'architecte créateur. Ce sont là deux grands complexes dont on peut appeler le premier : caractère fonctionnel ou aussi objectif, le second, formel ou subjectif. Mais les deux termes sont peu précis et il faut, avant tout, examiner leur contenu. Le caractère fonctionnel exprime la fonction sociale de la construction, ses conditions statiques, d'exploitation et climatiques, des espaces et d'autres faits résultant de conditions extérieures.

L'expression formelle exprime le sentiment formel de l'architecte, lequel dépend de toute une classe et de la nation et de l'époque. Mais à côté de ces deux exemples de caractère, il existe encore quelque chose que nous pouvons appeler le caractérogramme.

Le caractère subjectif ou formel est ordinairement lié à certaines formes, à un système de formes. Il est la conséquence d'un effort conscient. Au contraire, le « caractérogramme » est cette teinte personnelle involontaire, cet accent individuel qui ne s'expriment par aucun système de formes, mais seulement par une dimension, par un rapport réciproque de parties, de proportions ou par une déformation à peine saisissable. Même un griffonnage ou un amoncellement de pierres et un ensemble de planches clouées d'une manière provisoire, dénués de toute forme, toute trace de ce genre d'activité humaine — fussent-ils construits sans aucun effort artistique — sont déjà des caractérogrammes parlants et nous dévoilent de qui nous les tenons.

D'ailleurs, pour lire ce caractérogramme, une graphologie a été fondée et un graphologue pourrait, à proprement parler, lire le caractère de ceux qui ont été à l'origine de la composition des villes et des maisons, de la méthode d'établir des modèles des choses, justement comme on déchiffre aujourd'hui une lettre.

Certes, cette manière de traiter la question a pour but de saisir des mots — ne disons pas de définir le caractère et le caractérogramme de l'architecture tchécoslovaque. Nous poserons d'abord la question : « Quelle est la caractéristique de l'architecture tchèque ? »

Le premier fait dont nous devons immédiatement nous étonner — quand on compare cette architecture avec une architecture étrangère — est la plus grande étendue spatiale, le caractère massue, et disons-le, la lourdeur des construc-