

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 81 (1955)  
**Heft:** 13

**Artikel:** Principes du calcul à l'aide de suites  
**Autor:** Cuénod, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61340>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

**Abonnements:**  
Suisse: 1 an, 24 francs  
Etranger: 28 francs  
Pour sociétaires:  
Suisse: 1 an, 20 francs  
Etranger: 25 francs  
Prix du numéro: Fr. 1.40  
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »  
N° II. 57 75, à Lausanne.  
**Expédition**  
Imprimerie « La Concorde »  
Terreaux 31 — Lausanne.  
**Rédaction**  
et éditions de la S. A. du  
Bulletin technique (tirés à part), Case Chauderon 475  
**Administration générale**  
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; † E. Lateltin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. † L. Archinard, ingénieur; Cl. Groscurin, architecte; E. Martin, architecte — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; Burgener, D. architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration  
de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président;  
M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

## Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

Annonces Suisses S. A.  
(ASSA)



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26  
Lausanne et succursales

SOMMAIRE: *Principes du calcul à l'aide de suites* (suite et fin), par MICHEL CUÉNOD, ingénieur à Genève. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes: *Rapport du président sur l'exercice 1954-1955*. — CORRESPONDANCE: *A propos du jugement des concours d'architecture*. — DIVERS: *Quarante ans d'enseignement*. — NÉCROLOGIE: *Emmanuel Chevalley, ingénieur*. — BIBLIOGRAPHIE. — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — DOCUMENTATION DU BATIMENT. — INFORMATIONS DIVERSES.

## PRINCIPES DU CALCUL A L'AIDE DE SUITES

par MICHEL CUÉNOD, ingénieur à la Société Générale pour l'Industrie, Genève

(Suite et fin.)<sup>1</sup>

### V. Equations différentielles linéaires à coefficients variables et équations différentielles non linéaires

Beaucoup de problèmes posés par la technique conduisent à des équations différentielles dont les coefficients sont variables soit en fonction de la variable indépendante, soit en fonction de la variable à intégrer.

Le principe même du calcul à l'aide de suites implique que l'on puisse superposer les variations des fonctions unitaires. Il n'est donc pas applicable sans autre aux équations de ce type. Cependant, nous avons vu que le formalisme de ce calcul consiste en première approximation à remplacer une fonction continue par une fonction discontinue qui varie par échelon. Ce formalisme peut également être appliqué aux coefficients des équations différentielles. Pour chacun des échelons, on peut

admettre que les coefficients sont constants et on est ainsi ramené au cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants que nous avons déjà traité.

Cette méthode est justifiée en particulier pour l'étude de certains problèmes (self qui se sature, régulateur qui arrive à fin de course, etc.) pour lesquels la variation des coefficients n'est pas connue, mais s'effectue par palier.

Le principe de la résolution d'équations de ce genre est de l'effectuer par étapes successives, chacune de ces étapes correspondant à un des échelons qui caractérisent la variation des coefficients de l'équation à résoudre. Au début de chaque étape il faut tenir compte des valeurs initiales de la variable à intégrer, ainsi que des nouvelles valeurs des coefficients.

Considérons par exemple une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre dont les coefficients sont variables en fonction du temps.

$$a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = F(t).$$

<sup>1</sup> Voir *Bulletin technique* du 11 juin 1955, page 187.

Nous admettons que pour

$$t_i < t < t_k \quad a = \text{const.} = a_i \\ b = \text{const.} = b_i.$$

Nous intégrons cette équation et obtenons, lorsque  $t$  est compris entre  $t_i$  et  $t_k$ :

$$a_i(x - x_i) + b_i \int_{t_i}^t x dt = \int_{t_i}^t F(t) dt,$$

avec  $x_i$  = valeur de  $x$  obtenue par le calcul de la précédente étape correspondant à  $t = t_i$ . Si l'ordre de l'équation était plus élevé que le premier, il faudrait prendre également en considération les valeurs des dérivées de  $x$  correspondant à  $x_i$ .

En utilisant le calcul à l'aide de suites, on obtient pour le palier  $t_i < t < t_k$ :

$$S(x) = \frac{S(F) \bullet D(-t_i) \bullet \tau[0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \left(\frac{\tau}{2}(f_i - b_i x_i) + a_i x_i\right) [1; 1; \dots; 1; \dots]}{[a_i + 0,5 b_i \tau; b_i \tau; b_i \tau; \dots; b_i \tau; \dots]}.$$

Lorsque  $t$  atteint la valeur  $t_k$ , il faut arrêter l'opération, puis la recommencer avec les valeurs  $f_k$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  et  $x_k$  qui correspondent à  $x_k$ .

Le principe de la résolution est le même lorsque les coefficients sont fonction de la variable à intégrer.

$$a(x) \frac{dx}{dt} + b(x) x = F(t).$$

Nous admettons que pour

$$x_u < x < x_v \quad a = \text{const.} = a_u, \\ b = \text{const.} = b_u.$$

Lorsque  $x$  est compris entre ces valeurs, on obtient :

$$S(x) = \frac{S(F) \bullet D(-t_u) \bullet \tau[0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \left(\frac{\tau}{2}(f_u - b_u x_u) + a_u x_u\right) [1; 1; \dots; 1; \dots]}{[a_u + 0,5 b_u \tau; b_u \tau; b_u \tau; \dots; b_u \tau; \dots]}.$$

Les valeurs  $t_u$ ,  $x_u$  ne sont pas connues d'avance, mais résultent du calcul du palier précédent; lorsque  $x$  atteint la valeur  $x_v$  ce qui détermine  $t_v$ , l'opération doit être arrêtée pour être recommencée ensuite avec les nouvelles valeurs des paramètres.

Lorsque les coefficients varient simultanément en fonction de  $x$  et de  $t$ , les deux modes de résolution indiqués ci-dessus doivent être conjugués.

**Exemple**

*Circuit électrique formé d'une résistance et d'une induction saturable*

Nous considérons le circuit électrique représenté par la figure 15 et formé d'une résistance  $R$  et d'une inductivité avec noyau de fer  $L(i)$ . La figure 16 indique la valeur de l'induction en fonction du courant. En première approximation, cette valeur est donnée par

2 segments de droite. Soit  $i_s$  la valeur du courant de saturation. Il en résulte que pour

$$0 < i < i_s \quad L(i) = L_1 \\ i_s < i < \infty \quad L(i) = L_2.$$

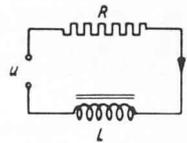


FIG. 15. — Circuit électrique formé d'une résistance et d'une inductance saturable.

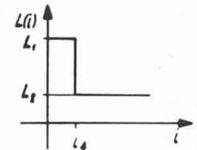


FIG. 16. — Valeur de l'induction en fonction du courant.

L'équation différentielle qui permet de calculer le courant est bien connue :

$$u = L(i) \frac{di}{dt} + Ri.$$

Nous divisons par  $R$  et obtenons :

$$T_i \frac{di}{dt} + i = i_m$$

avec  $T_i = \frac{L(i)}{R}$  = constante de temps du circuit.

$i_m = \frac{u}{R}$  = courant maximum qui s'établit pour  $t = \infty$ .

Nous admettons que la tension  $u$  est brusquement enclenchée puis maintenue constante et obtenons avec :

$$L(0) = 0 \quad T(i) = T_1,$$

$$S\left(\frac{i}{i_m}\right) = \frac{[1; 1; 1; \dots; 1; \dots] \bullet [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + 0,5 [1; 1; \dots; 1; \dots]}{[T_1 + 0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]}$$

$$S\left(\frac{i}{i_m}\right) = \frac{[1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots]}{[T_1 + 0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]}$$

pour  $i < i_s$ .

Lorsque le courant atteint la valeur de saturation, nous devons introduire la constante de temps  $T_2$  et tenir compte du fait que la valeur initiale du courant est alors égale à  $i_s$ . Il en résulte :

$$S\left(\frac{i}{i_m}\right) = \frac{[1; 2; 3; \dots; n; \dots] + \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{i_s}{i_m}\right) + \frac{i_s}{i_m} T_2\right) [1; 1; \dots; 1; \dots]}{[T_2 + 0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]}$$

Nous admettons, par exemple que :

$$\frac{i_s}{i_m} = 0,4 \quad T_1 = 8 \quad T_2 = 3.$$

Nous obtenons :

$$\text{pour } \frac{i}{i_m} < 0,4 \quad S\left(\frac{i}{i_m}\right) = \frac{[1; 2; 3; \dots; n; \dots]}{[8,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]} \\ = [0,118; 0,221; 0,313; 0,393; \dots]$$

pour

$$\frac{i}{i_m} > 0,4 \quad S\left(\frac{i}{i_m}\right) = \frac{[1; 2; 3; \dots; n; \dots] + 1,5 [1; 1; \dots; 1; \dots]}{[3,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]} \\ = \frac{[2,5; 3,5; 4,5; 5,5; \dots]}{[3,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]} = [0,715; 0,795; 0,853; 0,895; 0,926; \dots].$$

Cette variation de courant est représentée par la figure 17; on peut y reconnaître le coude bien connu dû à la saturation.

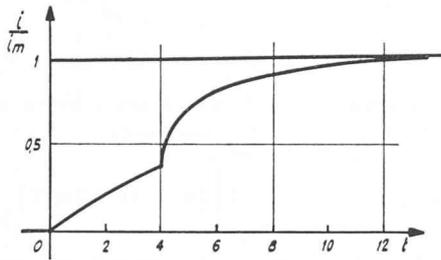


FIG. 17. — Variation du courant dans un circuit électrique formé d'une résistance et d'une inductance saturable.

## VI. Calcul avec une unité de grandeur négligeable

Lorsque la grandeur de l'unité choisie est très faible par rapport à l'intervalle sur lequel on prend les fonctions en considération, on peut, en première approximation, négliger le décalage que les opérations de différenciation ou d'intégration font intervenir, ce qui revient à assimiler la suite à intégrer ou à différencier à sa suite intercalaire. Ce mode de calcul est moins exact que celui que nous avons exposé précédemment; il a cependant l'avantage de conduire à des formules plus simples et de mettre en évidence de façon plus explicite la relation qui existe entre le calcul à l'aide de suites d'une part, le calcul infinitésimal et le calcul opérationnel d'autre part.

### 1. Relations entre le calcul à l'aide de suites et le calcul analytique

Lorsque l'unité choisie tend vers zéro, l'impulsion unitaire telle que nous l'avons définie dégénère en une *fonction de Dirac*. Nous rappelons que cette fonction est caractérisée par une impulsion au temps  $t = 0$  de durée infiniment courte, d'amplitude infinie, dont l'intégrale est égale à 1.

La réponse à l'impulsion unitaire correspond dans ce cas à la *fonction de Green*, le produit composé correspond à l'*intégrale de Duhamel* et le quotient composé correspond à la résolution de l'*équation intégrale de Volterra*.

$$S(A) * S(B) \triangleq \int_0^t A(t-\tau) B(\tau) d\tau.$$

Le tableau I récapitule et compare les différentes opérations fonctionnelles obtenues en tenant compte d'une part et en négligeant d'autre part la valeur de l'unité, et met en évidence la simplification des formules, qui résulte du calcul avec une unité de grandeur négligeable.

### 2. Relations entre le calcul à l'aide de suites et le calcul opérationnel

Nous avons vu qu'une autre façon de décomposer une fonction en éléments simples consiste à prendre en considération des fonctions exponentielles à exposant réel ou complexe, et que ce mode de calcul conduit au calcul opérationnel dont le fondement mathématique est donné par les transformations de Laplace. Le tableau II rappelle les correspondances qui existent entre certaines fonctions et opérations fonctionnelles analytiques, les fonctions et opérations équivalentes du calcul opérationnel d'une part, et celles du calcul à l'aide de suites, d'autre part. Nous voyons qu'à l'opérateur  $p$  du calcul opérationnel correspond la suite  $[1; -1]$ . Ce tableau pourrait être facilement complété. Nous attirons l'attention sur le fait que nous considérons le calcul opérationnel basé sur la formule de transformation que G. Doetsch utilise (9):

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt.$$

Cette formule doit être soigneusement distinguée de celle que K. W. Wagner (10) et N. W. Mc Lachlan (11) en particulier utilisent:

$$f^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt.$$

La grande analogie qui existe entre le calcul opérationnel et le calcul à l'aide de suites ressort du tableau II. A la transformation temps-opérateur, qui n'est en fait qu'une décomposition en composantes harmoniques de la fonction considérée, correspond la décomposition de cette fonction en une suite d'impulsions. Cependant une différence entre les deux modes de calcul est que, grâce à la transformation opérateur-temps, le résultat du calcul opérationnel peut être exprimé en fonction du temps, alors que le résultat du calcul à l'aide de suites reste exprimé sous forme d'une suite. Il existe une autre différence entre ces deux modes de calcul:

Le calcul opérationnel basé sur les transformations de Laplace, grâce aux travaux d'éminents mathématiciens parmi lesquels on peut citer les travaux de Doetsch (9) K. W. Wagner (10), Carson (12), et plus récemment, la théorie de distribution de Schwartz (13), satisfait actuellement à toutes les conditions de la rigueur mathématique, alors que le calcul à l'aide de suites est un calcul approximatif. Par contre, l'application de ce dernier est plus étendue. Si nombreuses que soient les transformations du calcul opérationnel, leur nombre est relativement très restreint, et ces transformations ne s'appliquent qu'à des fonctions

analytiques. La calcul à l'aide de suites peut être, dans de nombreux cas, avantageusement combiné avec le calcul opérationnel, en permettant, par exemple, de calculer de nouvelles transformations, obtenues par la combinaison de transformations connues.

Soit deux fonctions opérationnelles  $f(p)$  et  $g(p)$  formées par la somme d'une série de fonctions opérationnelles :

$$f(p) = f_1(p) + f_2(p) + \dots$$

$$g(p) = g_1(p) + g_2(p) + \dots$$

Si l'on connaît les fonctions temps correspondant à chaque terme de ces suites, et partant, les suites correspondantes  $S(f_1), S(f_2), \dots$  et  $S(g_1), S(g_2), \dots$ , il est facile de calculer, à l'aide du produit ou du quotient composés, la suite qui correspond au produit ou au quotient de  $f(p)$  par  $g(p)$ , ce qui n'est pas toujours possible à l'aide des transformations usuelles.

Le calcul à l'aide de suites s'avère très avantageux lorsqu'il s'agit d'exprimer en valeur numérique le résultat de calculs, surtout lorsqu'il faut combiner des fonctions obtenues par voie expérimentale avec des fonctions déterminées par voie analytique.

*Exemple*

Considérons la fonction opérationnelle :  $f(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ .

La fonction temps qui lui est équivalente est connue :  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ . Cette fonction est représentée par la courbe 1 de la figure 18.

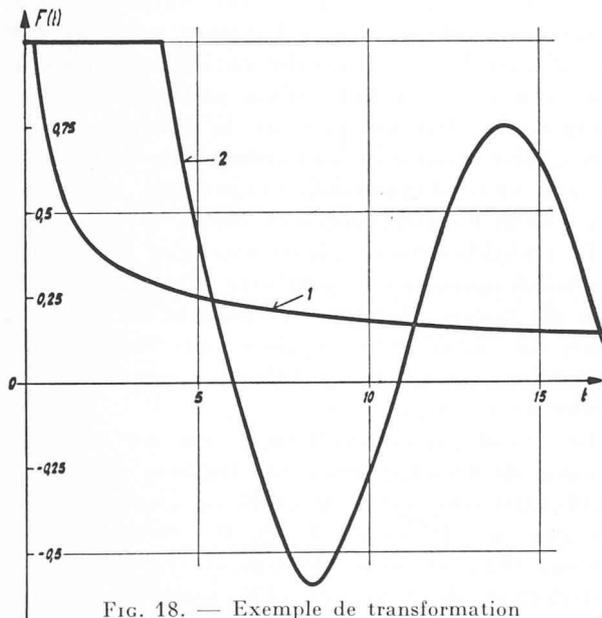


FIG. 18. — Exemple de transformation de fonctions opérationnelles à l'aide de suites.

Courbe 1 :  $F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt} \frac{1}{\sqrt{p}} dp = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$

Courbe 2 :  $F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt} \frac{\sqrt{p}}{e^{-pT} + \sqrt{p}} dp$

Proposons-nous de calculer la fonction qui correspond à la fonction opérationnelle suivante :

$$f(p) = \frac{\sqrt{p}}{e^{-pT} + \sqrt{p}} = \frac{1}{\frac{e^{-pT}}{\sqrt{p}} + 1}$$

En considérant une réponse à un échelon unité et en admettant  $T = 4$ , nous obtenons :

$$S(F) = [1; 1; \dots; 1; \dots] * \left[ [1] + D(+4) * S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) \right]$$

Le résultat de ce quotient composé est représenté par la courbe 2 de la figure 18 qui est un exemple de la façon dont de nouvelles transformations opérateur-temps peuvent être déterminées au moyen du calcul à l'aide de suites.

**3. Exemples**

*A. Intégrations et dérivations successives de l'impulsion unitaire*

Les termes de la suite de la  $k^{\text{ième}}$  intégration ou dérivation de l'impulsion unitaire  $I(t)$  sont donnés par les coefficients du binôme de Newton :

$$\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t I(t) dt \triangleq \tau^k [1; -1]^{-k} =$$

$$= \tau^k \left[ 1; k; \frac{k(k+1)}{2}; \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}; \dots \right]$$

$$\dots; \frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-2)}{(n-1)!}; \dots \Big]$$

L'erreur qui affecte ce mode d'intégration est indiquée dans l'annexe II de la thèse dont cet article est extrait. D'autre part :

$$\frac{d^k}{dt^k} (I) \triangleq \frac{1}{\tau^k} [1; -1]^k = \frac{1}{\tau^k} \left[ 1; -k; \frac{-k(-k+1)}{2}; \right.$$

$$\left. \frac{-k(-k+1)(-k+2)}{3!}; \dots; \frac{-k(-k+1)(-k+2)\dots(-k+n-2)}{(n-1)!}; \dots \right]$$

Ainsi nous obtenons :

pour  $k = 0$   $[1; -1]^0 = [1]$   
 $k = 1$   $[1; -1]^1 = [1; -1]$   
 $k = 2$   $[1; -1]^2 = [1; -2; 1]$   
 $k = 3$   $[1; -1]^3 = [1; -3; 3; -1]$   
 $k = 4$   $[1; -1]^4 = [1; -4; 6; -4; 1]$   
 $h = 5$   $[1; -1]^5 = [1; -5; 10; -10; 5; -1]$

Nous reconnaissons les coefficients donnés par le triangle arithmétique de Pascal.

Ce développement est valable également lorsque  $k$  est fractionnaire, ce qui permet de calculer les fonctions gamma  $\Gamma(k)$  (14).

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$$

$$S\left(\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}\right) = \tau^k [1; -1]^k$$

Dans le cas particulier où  $k = \frac{1}{2}$ , nous obtenons (avec  $\tau = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 [1; -1]_{\frac{1}{2}} &= \left[ 1; \frac{1}{2}; \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right); \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3!} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} + 2 \right) \dots \right] \\
 &= \left[ 1; \frac{1}{2}; \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}; \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}; \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}; \dots \right] \\
 &= [1; 0,5; 0,375; 0,314; 0,274; 0,247; \dots].
 \end{aligned}$$

Il est connu d'autre part qu'à la fonction opérationnelle  $f(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$  correspond la fonction temps  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$  représentée par la courbe 1 de la figure 18: la suite qui caractérise cette courbe correspond bien à celle obtenue pour  $[1; -1]_{\frac{1}{2}}$  ce qui confirme la validité de ce développement dans ce cas particulier.

Il est connu que le produit de l'opérateur  $p^k$  avec une fonction  $f(p)$  pour  $k$  quelconque négatif est donné par une intégrale d'où il résulte (14):

$$S\left(\frac{1}{\Gamma_k} \int_0^t u^{k-1} F(t-u) du\right) = \tau^k [1; -1]^k * S(F).$$

Le calcul à l'aide de suites est très avantageux lorsque la fonction  $F(t)$  a une allure quelconque résultant par exemple d'un relevé expérimental.

### B. Calcul d'un dispositif mécanique

Nous considérons à nouveau le dispositif mécanique représenté par la figure 10 et constitué par un amortisseur et un ressort. Nous avons obtenu l'équation différentielle suivante (voir p. 198):

$$\frac{b}{f} \frac{dx}{dt} + x = k(t).$$

Nous transformons cette équation différentielle à l'aide de suites et obtenons:

$$TS(x) * [1; -1] + S(x) = S(k),$$

avec:  $T = \frac{b}{f\tau}$  = constante de temps mesurée avec l'unité  $\tau$ ,

$$S(x) = \frac{S(k)}{T[1; -1] + [1]} = \frac{S(k)}{[T + 1; -T]}.$$

Si l'on résout cette équation différentielle à l'aide du calcul opérationnel, on obtient sous forme opérationnelle l'expression suivante:

$$x(p) = \frac{k(p)}{pT + 1}.$$

Cette expression illustre particulièrement bien l'analogie entre le calcul opérationnel et le calcul à l'aide de suites.

Nous supposons à nouveau que  $T = 8$  et admettons une variation de  $k$  selon un échelon rectangulaire.

Nous effectuons le produit composé qui caractérise  $S(x)$  et obtenons:

$$\begin{aligned}
 \frac{S(x)}{k} &= \frac{[1; 1; \dots; 1; \dots]}{[9; -8]} = [0,111; 0,209; 0,297; \\
 &0,374; 0,444; 0,506; 0,562; 0,613; 0,657; 0,692; \\
 &0,726; \dots].
 \end{aligned}$$

Cette suite est représentée par la courbe 4 de la figure 11. Nous voyons que pour les premiers termes, la différence avec la fonction obtenue par voie analytique est appréciable, mais qu'elle diminue en valeur relative pour les termes plus élevés.

Dans le cas particulier où  $k(t)$  est égal à l'échelon rectangulaire unitaire, nous avons vu que la solution de cette équation différentielle est la fonction exponentielle représentée par la courbe 2 de la figure 11

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{b}} \quad \text{avec} \quad x_0 = 0.$$

Nous vérifions que dans la solution obtenue au moyen du calcul à l'aide de suites, nous retrouvons la même solution lorsque l'unité choisie tend vers zéro. Nous obtenons en effet:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{[1; 1; 1; \dots; 1; \dots]}{[T + 1; -T]} = \\
 &= [1; 1; 1; \dots; 1; \dots] * \left[ 1 - \frac{T[1; -1]}{[T + 1; -T]} \right] = \\
 &= [1; 1; \dots; 1; \dots] - \frac{[1; 1; \dots; 1; \dots] * [T; -T]}{[T + 1; -T]} = \\
 &= [1; 1; \dots; 1; \dots] - \frac{[T]}{[T + 1; -T]}.
 \end{aligned}$$

Nous effectuons le quotient composé contenu dans cette expression:

$$\begin{array}{c}
 T \\
 T - \frac{T^2}{T+1} \\
 0 \\
 \frac{T^2}{T+1} \\
 \frac{T^2}{T+1} - \frac{T^3}{(T+1)^2} \\
 0 \\
 \frac{T^3}{(T+1)^2} \\
 \frac{T^3}{(T+1)^2} - \frac{T^4}{(T+1)^3} \\
 0 \\
 \frac{T^4}{(T+1)^3} \\
 \vdots
 \end{array}
 \left| \begin{array}{c}
 T+1; -T \\
 \frac{T}{T+1}; \frac{T^2}{(T+1)^2}; \frac{T^3}{(T+1)^3}; \dots; \frac{T^n}{(T+1)^n}; \dots
 \end{array} \right.$$

Nous voyons que nous obtenons comme terme général qui correspond au temps  $t = n\tau$  l'expression suivante:

$$x_n = 1 - \frac{T^n}{(1+T)^n}.$$

L'erreur qui affecte ce résultat est indiquée dans l'annexe II de la thèse déjà mentionnée. Nous contrô-

lons que si l'unité  $\tau$  tend vers zéro, nous retrouvons le résultat obtenu par la méthode analytique :

$$x_n = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{T}\right)^n} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{b\tau}\right)^{\frac{t}{\tau}}}$$

La limite suivante est connue :

$$\left(1 + \frac{y}{k}\right)^k \Big|_{k=\infty} = e^y ;$$

en posant  $k = \frac{1}{\tau}$ ,  $y = \frac{b}{f}$  et en faisant tendre  $\tau$  vers zéro, nous obtenons :

$$x_n \triangleq x(t) = \left(1 - \left(1 + \frac{b}{f\tau}\right)^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Big|_{\tau \rightarrow 0} = 1 - e^{-\frac{tb}{f}}$$

Dans le cas limite où l'unité choisie est nulle, le résultat obtenu avec le calcul à l'aide de suites coïncide bien avec le résultat obtenu par voie analytique.

## Conclusion

Si la théorie des réglages automatiques est un des principaux domaines où l'application du calcul à l'aide de suites semble indiquée, cette application apparaît également possible chaque fois qu'il s'agit de déterminer la relation qui existe entre deux ou plusieurs grandeurs variant en fonction du temps ou d'une autre variable et ayant des répercussions les unes sur les autres. Parmi les domaines où cette application peut être envisagée, on peut citer les suivants :

### I. Application du calcul à l'aide de suites à la technique des commandes à distance

Un domaine qui est très proche de celui des réglages automatiques est celui des commandes à distance. Ce domaine a pris une très grande extension ces dernières années. Pour des processus de fabrication de plus en plus automatique et, dans le domaine militaire, par suite de l'introduction de projectiles téléguidés, il est souvent nécessaire de transmettre un certain déplacement le plus fidèlement et le plus rapidement possible ; parfois, la puissance de commande est très faible et les masses à mettre en mouvement sont très importantes, ce qui nécessite une cascade d'amplificateurs. Le calcul à l'aide de suites permet de déterminer facilement les caractéristiques dynamiques de chacun des amplificateurs, et, dès que ces caractéristiques sont connues, de déterminer avec quelle fidélité les mouvements sont transmis.

### II. Application du calcul à l'aide de suites à la technique des courants faibles

Une des tâches essentielles de la technique des courants faibles est de déterminer la déformation que subissent des signaux par leur passage dans des filtres ou des lignes de transmission. L'étude de cette déformation se fait généralement en décomposant ces signaux en séries de Fourier, en calculant l'influence de la transmission sur chacune

des composantes harmoniques de cette série, puis en reconstituant le signal au moyen du regroupement des composantes harmoniques. Cette méthode a l'inconvénient d'être assez fastidieuse, surtout si le signal considéré n'a pas une forme analytiquement simple. Dans ce cas, le calcul de cette déformation peut avantageusement être effectué au moyen du calcul à l'aide de suites.

Si l'on a pu déterminer la réponse du filtre ou de la transmission à un signal de forme donnée, il est aisé de déterminer la déformation que subira un signal de forme quelconque. La réponse du filtre ou de la transmission peut être, soit mesurée expérimentalement, soit calculée. Parmi les cas pratiques où l'application de cette méthode peut être envisagée dans ce domaine, on peut signaler le calcul de la déformation des impulsions de télévision, le calcul de la distorsion d'un haut-parleur, etc.

### III. Application du calcul à l'aide de suites aux sciences économiques

Une des raisons qui retarde le développement des sciences économiques est que, contrairement aux sciences physiques, il n'est pas possible de procéder à des essais systématiques ; on en est réduit, après coup, à constater à l'aide de statistiques les relations qui existent entre les facteurs qui caractérisent la vie économique d'un pays, tel que le niveau des prix, de la production, des investissements, etc. Il est connu que ces différents facteurs influent les uns sur les autres, mais que cette influence n'est pas instantanée. D'aucuns ont vu dans ces « décalages », c'est-à-dire dans le retard avec lequel les facteurs économiques réagissent les uns sur les autres la cause des crises économiques. Un parallèle peut être établi entre l'étude de la stabilité des réglages automatiques et la stabilité en économie. On peut considérer que les relations qui existent entre le prix, les investissements, la production, la consommation forment également un « circuit de réglage », mais il est difficile de donner une valeur quantitative à ces relations ; le calcul à l'aide de suites ouvre à ce sujet des possibilités intéressantes. Considérons, par exemple, que l'on se propose de déterminer la relation qui existe entre les investissements et la production, et que l'on ait relevé les statistiques des variations des investissements et de la production dans une série de cas. Grâce au produit et au quotient composés, il est possible de ramener les variations de la production (effet) à une variation unitaire de l'investissement (cause), ce qui donne la possibilité de comparer les relations entre elles et d'en tirer des valeurs moyennes. Bien entendu, ce qui rend cette investigation particulièrement délicate en économie, c'est qu'il n'est pas possible d'isoler un phénomène ; ainsi, une variation de la production peut être due à d'autres causes qu'une variation de l'investissement. D'autre part, nous avons vu que les opérations à l'aide de suites

étaient basées sur l'hypothèse implicite que les phénomènes considérés étaient linéaires, ce qui n'est valable qu'en première approximation pour des petits écarts. C'est une raison de plus pour chercher à comparer le plus grand nombre de cas possible en les ramenant à une variation unitaire de la cause.

Il est peut-être présomptueux de vouloir appliquer à proprement parler des critères de stabilité aux cycles économiques, analogues à ceux que l'on

utilise pour la détermination des conditions de stabilité d'un réglage automatique ; du moins, une étude systématique à l'aide de suites telle que celle que nous esquissons permettrait de déterminer qualitativement les dispositions qui contribuent à stabiliser les fluctuations économiques ou, au contraire, à les aggraver et de prévoir l'évolution immédiate de la conjoncture.

Un autre domaine des sciences économiques où l'utilisation des suites apparaît comme indiquée

TABLEAU I  
Récapitulation des principales opérations du calcul à l'aide de suites

Opération analytique	Avec une unité de grandeur non négligeable	Avec une unité de grandeur négligeable
1. Produit composé : $B = \int_0^t A(t-\tau) G_{AB}(\tau) d\tau$	$S(B) = \tau[S_i(A) * S(G_{AB})]$ avec $S_i(A) = \left[ \frac{a_0+a_1}{2}; \frac{a_1+a_2}{2}; \frac{a_2+a_3}{2}; \dots \right]$	$S(B) = \tau[S(A) * S(G_{AB})]$
2. 1 <sup>re</sup> intégration : $\int_0^t F(t) dt$	$\tau \left( S(F) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \frac{f_0}{2} [1; 1; \dots; 1; \dots] \right)$	$\tau(S(F) * [1; 1; \dots; 1; \dots])$
3. intégration d'ordre k : $\int_0^t dt \int_0^t \dots \int_0^t F(t) dt$	$\frac{\tau^k}{k!} \left( \left[ S(F) * 0,5[1; 1] + \left[ \frac{f_0}{2} \right] * [1; -1] * [1; 2^k; 3^k; \dots; n^k; \dots] \right) \right)$	$\frac{\tau^k}{(k-1)!} (S(F) * [1; 2^{k-1}; 3^{k-1}; \dots; n^{k-1}; \dots])$
4. 1 <sup>re</sup> dérivation : $\frac{dF}{dt}$	$\frac{1}{2\tau} \left( [S(F) * [1; 0; -1] + f_0[1; -1]] * D(-1) \right)$	$\frac{1}{\tau} (S(F) * [1; -1] - [f_0])$
5. dérivation d'ordre k : $\frac{d^k F}{dt^k}$	$\frac{1}{(2\tau)^k} \left( [S(F) * [1; 0; -1]^k + f_0[1; -1] * [1; 0; -1]^{k-1} * D(-k)] + \frac{1}{(2\tau)^{k-1}} \left( [f'_0[1; -1] * [1; 0; -1]^{k-2} * D(1-k)] + \dots + \frac{1}{2\tau} (f_0^{(k-1)}[1; -1] * D(-1)) \right) \right)$	$\frac{S(F)}{\tau^k} * [1; -1]^k - \frac{f_0}{\tau^k} [1; -1]^{k-1} - \dots - \frac{f'_0}{\tau^{k-1}} [1; -1]^{k-2} - \dots - \frac{1}{\tau} [f_0^{(k-1)}]$
6. équation différentielle du 1 <sup>er</sup> ordre : $a \frac{dx}{dt} + bx = F(t)$	$S(x) = \frac{S(F) * \tau[0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \left( \frac{\tau}{2} (f_0 - bx_0) + ax_0 \right) [1; 1; \dots; 1; \dots]}{[a + 0,5 b\tau; b\tau; b\tau; \dots; b\tau; \dots]}$	$S(x) = \frac{S(F) + \frac{a}{\tau} [x_0]}{\frac{a}{\tau} [1; -1] + [b]}$
7. équation différentielle du 2 <sup>e</sup> ordre : $a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c = F(t)$	$S(x) = S(F) * \tau^2[0,25; 1; 2; 3; \dots; n; \dots] + \frac{\tau^2}{2} (f_0 - cx_0) [0,5; 1,5; \dots] + \tau (ax_0 + bx_0) [1; 2; 3; \dots; n; \dots] + \left( ax_0 - \frac{\tau}{2} bx_0 \right) [1; 1; \dots; 1; \dots]$ * [a + 0,5 bτ + 0,25cτ²; bτ + cτ²; bτ + 2cτ²; bτ + 3cτ²; ...]	$S(x) = \frac{\tau^2 S(F) + [ax_0 + \tau(ax_0 + bx_0) - ax_0]}{[a + b\tau + c\tau^2; -(2a + b\tau); a]}$

concerne l'organisation industrielle. Grâce à une analyse statistique très poussée des facteurs de la production, il est possible de contrôler, de toujours plus près, le développement d'une entreprise et de conduire celle-ci de façon toujours plus rationnelle. Ces différents facteurs, variations des stocks, des heures de travail, de l'occupation des machines, de la production, de la vente, des amortissements, etc., ne sont pas indépendants, mais liés les uns aux autres par des relations dynamiques. Le calcul à l'aide de suites permet de préciser les répercussions que ces différents facteurs ont les uns sur les autres. En plus de l'analyse statistique statique à l'aide de bilans, il est ainsi possible de développer une analyse dynamique du développement de l'entreprise.

**IV. Application du calcul à l'aide de suites aux sciences naturelles**

De même qu'en économie, on peut être amené dans les sciences naturelles à constater certaines relations sans qu'il soit possible d'effectuer des essais pour déterminer expérimentalement la nature de ces relations. Dans ce domaine également, une

étude à l'aide de suites peut conduire à des résultats intéressants, en géologie par exemple pour déterminer la relation qui existe entre la moyenne annuelle des températures et le mouvement des glaciers, entre les variations des précipitations et celles du débit des cours d'eau, en zoologie pour étudier l'influence de facteurs climatiques sur le développement de certaines races, en médecine pour suivre l'action de certains remèdes ou pour contrôler des réflexes physiologiques, en chimie pour observer des réactions à longue échéance dont les grandeurs qui sont les causes du phénomène considéré ne peuvent être maintenues constantes à volonté.

Ces domaines se prêtent difficilement au formalisme mathématique, par contre, le calcul à l'aide de suites qui élargit l'emploi pratique de la notion de fonction et part de données immédiates leur est beaucoup plus facilement applicable.

D'autres domaines d'application pourraient être encore indiqués, en particulier en électrotechnique (par exemple, étude des phénomènes d'échauffement d'appareils soumis à une charge variable), en hydrodynamique et aérodynamique. Leur énumération sortirait du cadre de cet exposé.

**TABLEAU II**  
**Correspondances entre le calcul analytique, le calcul à l'aide de suites et le calcul opérationnel**

	<i>Fonction analytique</i>	<i>Suite</i>	<i>Fonction opérationnelle</i>
Transformation . . . . .	$F(t)$	$S(F)=[f_1; f_2; \dots; f_n; \dots]$	$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$
Addition . . . . .	$F(t) + G(t)$	$S(F) + S(G)$	$f(p) + g(p)$
Soustraction . . . . .	$F(t) - G(t)$	$S(F) - S(G)$	$f(p) - g(p)$
Intégrale de Duhamel . .	$\int_0^t F(t-\theta) G(\theta) d\theta$	$S(F) * S(G)$	$f(p) \cdot g(p)$
Résolution de l'équation intégrale de Volterra . .		$S(F) * S(G)$	$f(p) : g(p)$
Intégration . . . . .	$\int_0^t F(t) dt$	$S(F) * [1; -1]$	$f(p) : p$
Dérivation . . . . .	$\frac{dF}{dt}$	$S(F) * [1; -1] = [f_0]$	$f(p) \cdot p - f_0$
Fonction de Dirac . . . .	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} d\omega$	[1]	1
Dérivée de la fonction de Dirac . . . . .	$\frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-j\omega t} d\omega$	[1; -1]	$p$
Echelon rectangulaire uni- taire . . . . .	$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$	$[1] * [1; -1] = [1; 1; \dots; 1; \dots]$	$1 : p$
Fonction linéaire . . . . .	$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{t}{T} & \text{pour } t > 0 \end{cases}$	$\frac{[1]}{T} * [1; -1]^2 = \frac{1}{T} [1; 2; 3; \dots; n; \dots]$	$1 : p^2 T$
Décalage . . . . .	$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < T \\ G(t-T) & \text{pour } t > T \end{cases}$	$S(G) * D(+T)$	$g(p) \cdot e^{-pT}$

**V. Utilisation de machines à calculer pour effectuer les opérations que comporte le calcul à l'aide de suites**

Un des avantages du calcul à l'aide de suites, c'est que son utilisation pratique ne fait appel qu'à des notions mathématiques élémentaires. Il peut être utilisé également par ceux qui n'ont pas une formation mathématique très poussée. Il conduit à des opérations très simples : addition, soustraction, multiplication, division. Les successions d'opérations que nécessitent le produit ou le quotient composés conviennent particulièrement bien aux machines à calculer, soit du type Hollerith avec cartes perforées, soit du type à relais ou électronique. L'inconvénient des machines du premier type, c'est qu'elles fonctionnent relativement lentement et qu'elles nécessitent l'utilisation d'un nombre élevé de cartes perforées. Leur avantage, c'est que le nombre de termes que l'on peut prendre est pratiquement illimité et que l'on peut obtenir une exactitude aussi bonne qu'on le désire. L'inconvénient des machines du deuxième type, c'est que le nombre des termes que la machine peut retenir dans sa « mémoire » est réduit. L'avantage, c'est que les calculs peuvent s'effectuer beaucoup plus rapidement.

Ces machines à calculer sont en passe de révolutionner les méthodes de recherche en technique et l'ingénieur a tout intérêt à en tirer tout le profit possible ; un des mérites du calcul à l'aide de suites est de présenter les opérations de façon telle qu'elles puissent être immédiatement effectuées par les machines à calculer.

\* \* \*

En résumé, nous avons vu que le calcul à l'aide de suites se prête particulièrement bien à l'étude de fonctions dont on ne connaît pas l'expression mathématique et qui sont caractérisées par un

enregistrement expérimental ou par des données statistiques. Il permet d'appliquer à ces fonctions un certain nombre d'opérations fonctionnelles : dérivation, intégration, produit composé, etc., et de résoudre certaines équations différentielles et intégrales où interviennent ces fonctions. Il réduit ces transformations et ces résolutions à un schéma de calcul qui rend systématique l'enchaînement des opérations et permet ainsi de confier l'exécution de ces opérations à des machines à calculer.

Etant donné son principe même, le calcul à l'aide de suites est un calcul approximatif. Nous avons vu que cette approximation peut être améliorée dans une certaine mesure en réduisant l'unité choisie. L'appréciation de l'exactitude des résultats auxquels conduit cette méthode de calcul est liée à la notion de rigueur telle que la conçoit l'ingénieur. La limite de la précision des instruments de mesure, les simplifications qui sont souvent nécessaires pour adapter l'étude du phénomène considéré au formalisme qui rend possible le calcul analytique sont d'autres causes qui restreignent les exigences de la précision à laquelle peut prétendre une investigation théorique.

D'autre part, l'activité de l'ingénieur est toujours placée sous le signe de l'économie et les moyens à mettre en œuvre doivent être adaptés au résultat en vue ; une méthode de calcul approximative, mais conduisant rapidement au résultat sera préférée à une méthode plus rigoureuse mais plus laborieuse dont les résultats seront également sujets à caution, par suite des autres causes d'inexactitudes auxquelles nous avons fait allusion.

Comme pour l'utilisation de tout schéma, le calcul à l'aide de suites est une méthode qu'il faut manier avec discernement. Cette méthode est susceptible d'être perfectionnée. Elle pourra être étendue aux fonctions à variable complexe ou avec plusieurs variables indépendantes.

**BIBLIOGRAPHIE**

- (1) A. TUSTIN : *A method of analysing the behaviour of linear systems in time-series*. The Journal of the Institution of Electr. Ing., 1947, Vol. 94, No. 1, Part II A.
- (2) M. CUÉNOD : *Etude de phénomènes transitoires à l'aide de suites de temps*. Bulletin tech. de la Suisse romande, 1949, n° 16.
- (3) M. CUÉNOD : *Méthode de calcul à l'aide de suites*, Ed. P. Feissly, Lausanne, 1955.
- (4) L. COLLATZ : *Einige Arbeiten über Fehlerabschätzungen*. Z. angew. Math. Mech., 32 (1952) und 33 (1953).
- (5) R. VON MISES und H. POLLACZEK-GEIRINGER : *Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung*. Z. angew. Math. Mech.
- (6) FR. A. WILLERS : *Methoden der Praktischen Analysis*. De Gruyter & Co, Berlin, 1950.
- (7) H. RÜTISHAUSER : *Über die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Vol. III, Fasc. 1 du 15.1.52.
- (8) VON KARMAN et BIOT : *Les méthodes mathématiques de l'ingénieur*. Librairie Polytechnique Béranger, Paris-Liège, 1949.
- (9) G. DOETSCH : *Handbuch der Laplace-Transformation*. Ed. Birkhausen, Bâle, 1950.
- (10) K.W. WAGNER : *Operatorenrechnung*. Ed. J. Ambrosius Barth, Leipzig, 1940.
- (11) N.W. Mc LACHLAN et P. HUMBERT : *Formulaire pour le calcul symbolique*. Memorial des sciences mathématiques, fascicule C, Paris, 1941.
- (12) J.P. CARSON : *Electric circuit theory and the operational calculus*. Mc Graw-Hill Book Co, New York, 1926, p. 16.
- (13) L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions et transformations de Fourier*. Annales de l'Université de Grenoble, tome XXIII.
- (14) M. DENIS-PAPIN et A. KAUFMANN : *Cours de calcul opérationnel*, p. 73. Albin Michel, Paris, 1950.