

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 94 (1968)
Heft: 15

Artikel: La calculatrice électronique à la disposition de l'ingénieur (suite et fin)
Autor: Dupuis, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-69647>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)
de la Section genevoise de la SIA
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole poly-
technique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève

Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgrain, arch.; J.-C. Ott, ing.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; M. Chevalier, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »

Président: D. Bonnard, ing.

Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; M. Cosan-
dey, ing.; J. Favre, arch.; A. Métraux, ing.; A. Rivoire,
arch.; J.-P. Stucky, ing.

Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

RÉDACTION

F. Vermeille, rédacteur en chef; E. Schnitzler, ingénieur, et M. Bevi-
lacqua, architecte, rédacteurs
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 46.—	Etranger	Fr. 60.—
Sociétaires	»	» 38.—	»	» 46.—
Prix du numéro	»	» 2.30	»	» 2.50

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »
N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au
numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie
La Concorde, Terreaux 29, 1003 Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 450.—
1/2 »	» 235.—
1/4 »	» 120.—
1/8 »	» 62.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.

Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26, 1000 Lausanne et succursales



SOMMAIRE

La calculatrice électronique à la disposition de l'ingénieur (suite et fin), par Georges Dupuis, ingénieur EPUL.
Le calcul électronique dans le domaine du génie civil aux Etats-Unis, par M. Gontran Gourdou, ingénieur EPUL.
Bibliographie. — Les congrès. — Carnet des concours.
Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Informations diverses.

LA CALCULATRICE ÉLECTRONIQUE À LA DISPOSITION DE L'INGÉNIEUR (Suite et fin) ¹

par GEORGES DUPUIS, ingénieur EPUL, collaborateur à l'Institut de mathématiques appliquées

3. Introduction à la méthode des éléments finis

L'application de la méthode des déplacements au cas d'un système triangulé comprenant n nœuds fait intervenir les $2n$ déplacements u_i, v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de ces nœuds. Le système est dit à $2n$ degrés de liberté.

Pour une structure à une dimension (cadre, arc, etc.), on peut toujours se ramener à un nombre fini de degrés de liberté et la méthode des déplacements s'applique comme dans l'exemple traité ci-dessus.

Dans ce paragraphe, nous nous attachons aux problèmes qui possèdent une infinité de degrés de liberté. Nous nous proposons de montrer comment utiliser la même technique de calcul que dans le cas d'une structure discrète, pour obtenir une solution approchée de ces problèmes. Nous introduisons la méthode des éléments finis à propos des problèmes d'élasticité plane, en procédant tout d'abord de manière intuitive.

Considérons un disque occupant une portion D du plan xy , d'épaisseur petite vis-à-vis de ses autres dimensions. Ce disque est sollicité par des forces coplanaires,

comprenant des forces de surface et des forces de ligne, appliquées au contour Γ du domaine D (fig. 10 a). On se propose de déterminer l'état de déplacement et de contrainte de disque.

Désignons par $u(x, y)$ et $v(x, y)$ les déplacements selon les axes Ox et Oy respectivement, du point de D de

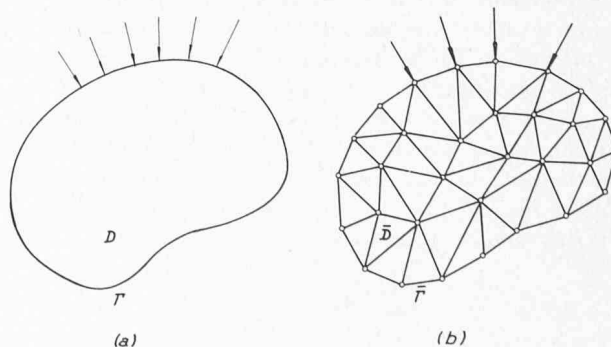


Fig. 10. — Disque sollicité par des forces coplanaires.

a) Forme donnée.

b) Forme approchée par un réseau triangulaire.

¹ Voir *Bulletin technique de la Suisse romande* N° 14, du 13 juillet 1968.

coordonnées (x, y) . En chaque point du domaine D sont attachées deux variables de déplacement et le système considéré possède une infinité de degrés de liberté.

Décomposons le domaine D en triangles appelés *éléments*, en remplaçant, si nécessaire, la frontière Γ de D par une ligne polygonale $\bar{\Gamma}$ (voir fig. 10 b). Les sommets des triangles sont appelés *nœuds* de la structure. Un *élément* va jouer ici le même rôle qu'une *barre* du système triangulé considéré plus haut. En nous inspirant de la marche suivie dans ce cas du treillis, nous isolons l'élément connecté aux nœuds i, j, k et nous nous proposons d'établir une relation entre les forces $P_{ijk}, Q_{ijk}, \dots$ appliquées aux nœuds et les déplacements $u_i, v_i, \dots$ de ces nœuds (voir fig. 11).

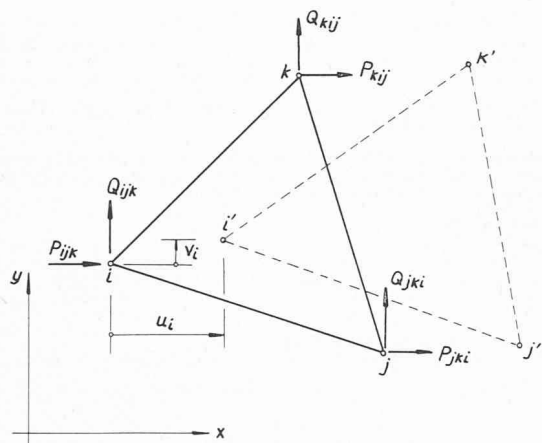


Fig. 11. — Élément de disque typique.

Si le triangle est assez petit, on peut admettre que les composantes $u(x, y)$ et $v(x, y)$ du déplacement de l'élément sont des fonctions linéaires en x et y . Le déplacement de l'élément est alors entièrement défini par les valeurs qu'il prend aux nœuds. Il résulte de cette hypothèse que les contraintes sont constantes à l'intérieur de l'élément. Ainsi, le déplacement est continu dans tout le domaine $\bar{D}$ et les équations de compatibilité sont satisfaites. Par contre, les contraintes qui agissent dans deux éléments adjacents sont en général différentes et les équations d'équilibre ne sont pas satisfaites.

Remplaçons les contraintes appliquées aux bords de l'élément par des forces équipollentes appliquées aux nœuds, nous définissons ainsi les *forces nodales* $P_{ijk}, Q_{ijk}, \dots$. Ces dernières dépendent linéairement des déplacements des nœuds $u_i, v_i, \dots$. Les relations entre les forces nodales et les déplacements des nœuds jouent le même rôle que les relations (5) relatives à une barre de triangulation. Si l'on suppose, pour simplifier, que le disque n'est sollicité que par des forces appliquées au contour et si l'on remplace les forces appliquées en un segment de bord par des forces équipollentes appliquées aux nœuds, les équations d'équilibre peuvent s'écrire comme précédemment

$$\left. \begin{aligned} \sum P_{ijk} &= X_i, \\ \sum Q_{ijk} &= Y_i, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

où les sommes portent sur tous les éléments qui aboutissent au nœud i ; X_i, Y_i désignant les composantes

de la force extérieure appliquée en ce nœud (ces forces sont les réactions d'appui lorsque le déplacement du nœud i est imposé).

La suite du calcul est identique à celle présentée en détail dans le cas du treillis. Le problème revient donc à exprimer les forces nodales en fonction des déplacements des nœuds. Afin de simplifier l'écriture, considérons l'élément connecté aux nœuds 1, 2, 3 et désignons par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ les coordonnées de ces nœuds et par $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)$ les composantes de leur déplacement. Le déplacement de l'élément peut s'écrire

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y, \\ v(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Les déplacements des nœuds satisfont les équations

$$\left. \begin{aligned} u_k &= u(x_k, y_k) = a_0 + a_1x_k + a_2y_k, \\ v_k &= v(x_k, y_k) = b_0 + b_1x_k + b_2y_k, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (19)$$

qui permettent de déterminer les coefficients $a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2$. Après quelques calculs, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{S} \left\{ \begin{aligned} &[(x_2y_3 - x_3y_2)u_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)u_2 + \\ &+ (x_1y_2 - x_2y_1)u_3] \\ &+ [(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3]x \\ &+ [(x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + \\ &+ (x_2 - x_1)u_3]y \end{aligned} \right\}, \\ v(x, y) &= \frac{1}{S} \left\{ \begin{aligned} &[(x_2y_3 - x_3y_2)v_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)v_2 + \\ &+ (x_1y_2 - x_2y_1)v_3] \\ &+ [(y_2 - y_3)v_1 + (y_3 - y_1)v_2 + (y_1 - y_2)v_3]x \\ &+ [(x_3 - x_2)v_1 + (x_1 - x_3)v_2 + \\ &+ (x_2 - x_1)v_3]y \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

avec $S = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$.

Les paramètres de déformation s'obtiennent par dérivation :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{S} \left[(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + \right. \\ &\quad \left. + (y_1 - y_2)u_3 \right], \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{S} \left[(x_3 - x_2)v_1 + (x_1 - x_3)v_2 + \right. \\ &\quad \left. + (x_2 - x_1)v_3 \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{S} \left[(x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + \right. \\ &\quad \left. + (x_2 - x_1)u_3 + (y_2 - y_3)v_1 + (y_3 - y_1)v_2 + \right. \\ &\quad \left. + (y_1 - y_2)v_3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Enfin, les contraintes sont déduites des déformations par la loi de Hooke :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

où E est le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson. En substituant dans ces relations les expressions (21) des déformations, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{S(1-\nu^2)} \left\{ \left[(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3 \right] + \nu \left[(x_3 - x_2)v_1 + (x_1 - x_3)v_2 + (x_2 - x_1)v_3 \right] \right\}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{S(1-\nu^2)} \left\{ \left[(x_3 - x_2)v_1 + (x_1 - x_3)v_2 + (x_2 - x_1)v_3 \right] + \nu \left[(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3 \right] \right\}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2S(1+\nu)} \left\{ \left[(x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + (x_3 - x_1)u_3 \right] + \left[(y_2 - y_3)v_1 + (y_3 - y_1)v_2 + (y_1 - y_2)v_3 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Afin d'obtenir l'expression des forces nodales appliquées au nœud 1, considérons l'élément représenté à la figure 12 a). La partie hachurée du triangle est en équilibre sous l'effet des forces nodales P_{123} , Q_{123} et des contraintes σ , τ appliquées au segment AB . Ces dernières sont statiquement équivalentes aux contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} appliquées à la ligne brisée de la figure 12 b). Les équations d'équilibre de la partie hachurée de l'élément peuvent donc s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} P_{123} &= \sigma_x \frac{y_2 - y_3}{2} + \tau_{xy} \frac{x_3 - x_2}{2}, \\ Q_{123} &= \sigma_y \frac{x_3 - x_2}{2} + \tau_{xy} \frac{y_2 - y_3}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Compte tenu des expressions (23) des contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} , on obtient finalement les forces nodales P_{123} , Q_{123} , en fonction des déplacements des nœuds :

$$\left. \begin{aligned} P_{123} &= \frac{E}{2S(1-\nu^2)} \left\{ \left[(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3 \right] + \nu \left[(x_3 - x_2)v_1 + (x_1 - x_3)v_2 + (x_2 - x_1)v_3 \right] \right\} (y_2 - y_3) + \frac{E}{4S(1+\nu)} \left\{ \left[(x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + (x_3 - x_1)u_3 \right] + \left[(y_2 - y_3)v_1 + (y_3 - y_1)v_2 + (y_1 - y_2)v_3 \right] \right\} (x_3 - x_2), \\ Q_{123} &= \frac{E}{2S(1-\nu^2)} \left\{ \left[(x_3 - x_2)v_1 + (x_1 - x_3)v_2 + (x_2 - x_1)v_3 \right] + \nu \left[(y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3 \right] \right\} (x_3 - x_2) + \frac{E}{4S(1+\nu)} \left\{ \left[(x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + (x_3 - x_1)u_3 \right] + \left[(y_2 - y_3)v_1 + (y_3 - y_1)v_2 + (y_1 - y_2)v_3 \right] \right\} (y_2 - y_3). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

On obtiendrait de la même manière les forces nodales appliquées aux nœuds 2 et 3. Ces formules permettent d'écrire les équations d'équilibre (17) en fonction des déplacements des nœuds. On obtient ainsi un système d'équations linéaires dans ces paramètres ; ce système résolu, on détermine les contraintes à partir des relations (23).

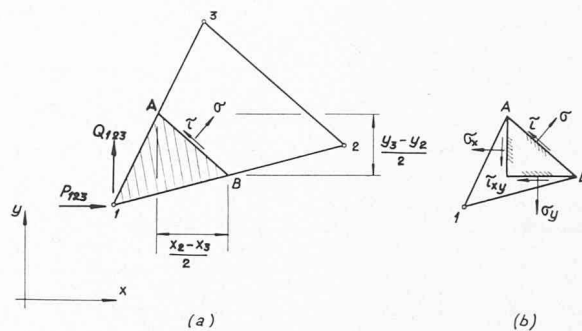


Fig. 12. — Détermination des forces nodales.

Exemple numérique

Considérons la poutre représentée à la figure 13 ; cette poutre est sollicitée par une charge uniformément répartie, équilibrée par des contraintes tangentielles appliquées aux côtés $x = \pm 3$. Pour supprimer les déplacements rigides, nous annulons les déplacements verticaux des points A et A' ainsi que le déplacement horizontal du point O . Nous avons déterminé les déplacements, à l'aide de la méthode décrite ci-dessus, pour les deux réseaux représentés à la figure 14. Les résultats obtenus, confrontés à la solution exacte, sont résumés dans le tableau 3.

TABLEAU 3

Nœud	Déplacement vertical		
	Réseau I (fig. 14 a)	Réseau II (fig. 14 b)	Solution exacte
1	29.97	32.95	34.27
2	—	31.95	33.23
3	26.40	28.99	30.13
4	—	24.14	25.07
5	16.05	17.57	18.21
6	—	9.45	9.76

La technique de calcul développée ci-dessus permet d'étudier la répartition des contraintes dans les poutres-parois, les profils de barrage, etc.

Dans ce qui précède, nous avons obtenu les équations d'équilibre (17) et l'expression des forces nodales (25) par des considérations intuitives. Celles-ci étaient facilitées par

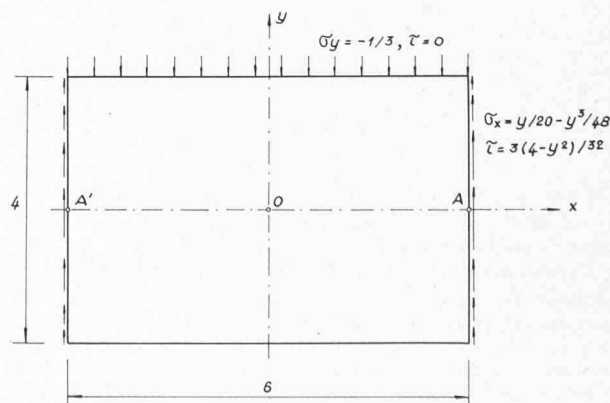


Fig. 13. — Exemple illustratif : poutre uniformément chargée.

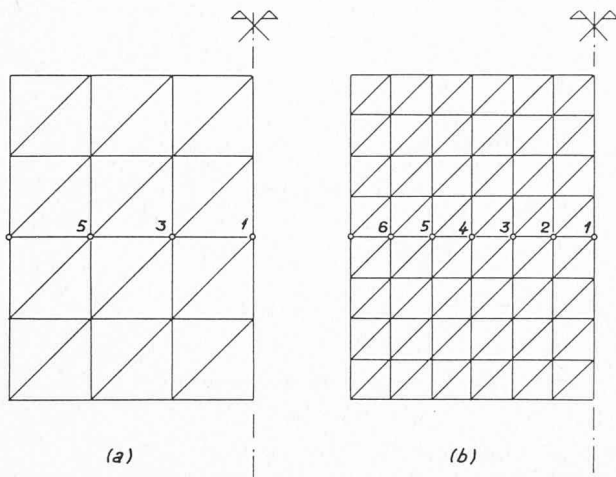


Fig. 14. — Réseaux triangulaires pour la demi-poutre de la figure 13.

la forme très simple du déplacement considéré (formule (18)). Si l'on choisit, pour les déplacements des éléments, des expressions moins simples, ou si l'on a à traiter un problème de plaque ou de coque, la méthode intuitive décrite ci-dessus s'applique difficilement. On utilise alors la propriété minimale de l'énergie potentielle. Nous allons esquisser la marche à suivre pour le problème qui nous occupe.

L'énergie de déformation du disque s'écrit :

$$U_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \iint_D (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2) dx dy$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy ;$$

puisque nous avons supposé que le disque n'est sollicité que par des forces de ligne, le potentiel des forces extérieures est donné par

$$U_2 = \int_{\Gamma} (pu + qv) ds,$$

où p et q sont les composantes de la force de ligne appliquée au contour Γ . L'énergie potentielle $U = U_1 - U_2$ vaut donc

$$U = \frac{E}{1-\nu^2} \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Gamma} (pu + qv) ds. \quad (26)$$

Pour le disque de forme approchée représenté à la figure 10 b), nous remplaçons D par $\bar{D}$ et Γ par $\bar{\Gamma}$ dans cette dernière expression.

Parmi toutes les fonctions u et v continues dans le domaine $\bar{D}$, celles qui rendent minimum l'expression (26) sont les déplacements cherchés. Nous allons rechercher ce minimum non pas sur l'ensemble de toutes les fonctions concurrentes mais sur un sous-ensemble de dimension finie. Considérons les fonctions u et v définies, sur chaque élément, par les formules (20) ; ces fonctions sont continues dans le domaine $\bar{D}$ et constituent un sous-ensemble de fonctions concurrentes de dimension $2n$, où n est le nombre de nœuds

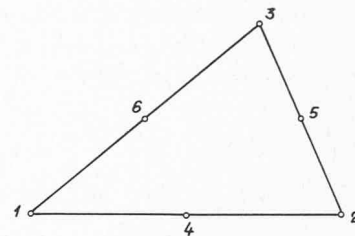


Fig. 15. — Nœuds associés à un élément dans le cas d'une variation quadratique des déplacements.

du domaine $\bar{D}$. Substituons, dans la fonctionnelle (26) à minimiser, les expressions approchées du déplacement, on obtient ainsi une fonction quadratique dans les $2n$ paramètres de déplacement des nœuds. En exprimant que cette fonction est minimum à la position d'équilibre, on est finalement conduit à un système d'équations linéaires relativement aux déplacements des nœuds. Sans entrer dans le détail des calculs, contentons-nous d'affirmer que le système linéaire que l'on obtient ainsi est identique à celui obtenu à l'aide de la méthode intuitive décrite ci-dessus.

Supposons maintenant que l'on choisisse pour les déplacements des éléments des polynômes de plus haut degré ; les contraintes ne sont plus constantes à l'intérieur des éléments et les forces nodales n'ont plus une signification aussi simple que dans le cas précédent. Par contre, la méthode de l'énergie se généralise sans autre ; si l'on choisit, par exemple, des fonctions quadratiques

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2, \\ v(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

on peut déterminer les coefficients $a_0, \dots, a_5 ; b_0, \dots, b_5$ en fonction des déplacements des six nœuds associés à chaque élément (fig. 15). Les déplacements de la forme (27) constituent un autre sous-ensemble de fonctions concurrentes du problème de variation (26) et le calcul se poursuit comme dans le cas précédent.

L'exemple numérique traité ci-dessus soulève plusieurs questions. On peut par exemple se demander si la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque la dimension des éléments tend vers zéro. D'autre part, est-il possible de choisir des déplacements qui conduisent à de meilleures approximations que celles obtenues ici ? Les réponses complètes sortiraient du cadre de cet exposé ; disons simplement qu'elles sont affirmatives et que ces méthodes numériques font des progrès constants.

4. Conclusions

Grâce au développement des calculatrices, les méthodes de calcul au service de l'ingénieur ont fait des progrès prodigieux au cours de cette dernière décennie. La classe de problème que l'on peut résoudre à l'aide d'une calculatrice est actuellement très vaste, tant en élasticité qu'en plasticité, dans le domaine des petites déformations comme dans celui des déformations finies.

Nous espérons avoir montré dans cet exposé combien une calculatrice peut être utile à l'ingénieur. La calculatrice ne se substitue pas à l'ingénieur mais est un outil puissant ; l'ingénieur doit se réjouir du développement des calculatrices puisque celles-ci le déchargent des tâches fastidieuses et lui permettent de consacrer davantage de temps à son art. En contrepartie, l'ingénieur doit se familiariser avec les nouvelles techniques de calcul.